

THESE
présentée pour l'obtention
du
DIPLOME de DOCTEUR de 3e CYCLE
à
L'UNIVERSITE DE PARIS VI

spécialité : électronique

par

Gérard SAUVAGE

Sujet de la thèse :

INSTABILITE DE FREQUENCE A COURT TERME DES OSCILLATEURS:
ETUDE DES NOUVELLES METHODES DE MESURE
DANS LES DOMAINES FREQUENCE ET TEMPS.

soutenue le 27 Novembre 1974
devant la Commission composée de :
Monsieur J. UEBERSFELD Président
Monsieur J. de PRINS examinateur
Monsieur M. OLIVIER "
Monsieur J. AUVRAY "
Monsieur R. MOREAU "
Monsieur J. RUTMAN invité

THESE
présentée pour l'obtention
du
DIPLOME de DOCTEUR de 3e CYCLE
à
L'UNIVERSITE DE PARIS VI

spécialité : électronique
par

Gérard SAUVAGE

Sujet de la thèse :

INSTABILITE DE FREQUENCE A COURT TERME DES OSCILLATEURS:
ETUDE DES NOUVELLES METHODES DE MESURE
DANS LES DOMAINES FREQUENCE ET TEMPS.

soutenue le 27 Novembre 1974
devant la Commission composée de :
Monsieur J. UEBERSFELD Président
Monsieur J. de PRINS examinateur
Monsieur M. OLIVIER "
Monsieur J. AUVRAY "
Monsieur R. MOREAU "
Monsieur J. RUTMAN invité

Je remercie Monsieur J. Royer, Président Directeur Général, et Monsieur Charbonnier, Directeur Technique, de m'avoir autorisé à préparer cette thèse dans le cadre du Laboratoire d'Etudes et de Recherches de la société Adret Electronique.

Je tiens à remercier tout particulièrement Monsieur J. Rutman^{*}, Responsable de la Recherche Fondamentale chez Adret Electronique, qui, après m'avoir confié le sujet de stage de D.E.A. qui m'a conduit à m'intéresser aux oscillateurs ultrastables, a bien voulu me proposer, puis diriger, ce travail de thèse.

Je remercie Monsieur le Professeur J. Uebersfeld, Professeur à l'Université de Paris VI, Directeur du Laboratoire de Physique de Métrologie des Oscillateurs du C.N.R.S. (Besançon), de s'être intéressé à ce travail et d'avoir accepté de présider le jury.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Monsieur le Professeur J. de Prins, Professeur à l'Université libre de Bruxelles, pour s'être intéressé à ce travail et avoir accepté de venir à Paris pour faire partie du jury.

Monsieur M. Olivier, Professeur à la Faculté des Sciences de Besançon, trouvera ici toute ma reconnaissance pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail et pour avoir accepté de venir à Paris faire partie du jury.

Je remercie également Monsieur J. Auvray, Professeur d'Electronique à l'Université de Paris VI, pour avoir bien voulu se pencher avec attention sur la partie électronique de l'expérience.

Je tiens à remercier enfin Monsieur R. Moreau, Directeur Scientifique Adjoint à la Direction de Physique Générale de l'O.N.E.R.A., qui a bien voulu examiner ce mémoire et faire partie du jury.

Je n'aurais garde d'oublier Madame D. Chatillon qui a su s'acquitter avec rapidité et compétence de la frappe du manuscrit, ainsi que Monsieur Legrand qui a bien voulu préparer les différentes photographies.

* A dater du 1er Janvier 1975, Monsieur Rutman est Directeur du Laboratoire Primaire de Fréquences (Bureau National de Métrologie).

TABLE DES MATIERES

<u>PRINCIPALES NOTATIONS</u>	page 8
<u>INTRODUCTION</u>	page 9

CHAPITRE I

CARACTERISTIQUES DE L'INSTABILITE DE FREQUENCE

A COURT TERME DES OSCILLATEURS

I - <u>INTRODUCTION</u>	page 12
II - <u>RAPPEL SUR LES FONCTIONS ALEATOIRES</u>	page 13
II.1 - Caractère aléatoire.	
II.2 - Densité de probabilité.	
II.3 - Les moments et les moyennes temporelles.	
II.4 - Stationnarité d'une fonction aléatoire.	
II.5 - Autocorrélation.	
II.6 - Densité spectrale.	
II.7 - Dérivation et intégration d'une fonction aléatoire.	
II.8 - Processus gaussien.	
II.8.1 - Définition.	
II.8.2 - Propriétés des passages à un niveau donné.	
III - <u>MODELES STATISTIQUES D'UN SIGNAL QUASI-SINUSOIDAL</u>	page 20
III.1 - Expression analytique d'un signal réel.	
III.2 - Propriétés du modèle.	
III.3 - Caractérisation de la stabilité des générateurs de fréquence.	
IV - <u>INSTABILITE DANS LE DOMAINE FREQUENCE</u>	page 22
IV.1 - Densités spectrales.	
IV.2 - Modèles de spectre.	
IV.3 - Banc de mesure.	

V.1 - Définition du paramètre $I(\tau)$.

V.1.1 - Définition.

V.1.2 - Relation entre $I(\tau)$, $R_\phi(\tau)$, $S_\phi(f)$.

V.1.3 - Détermination expérimentale.

V.1.4 - Lois de variation .

V.1.5 - Divergence pour certains modèles.

V.2 - Variance d'Allan.

V.2.1 - Définition.

V.2.2 - Relation entre $E[\sigma^2]$ et $R_\phi(\tau)$, $S_\phi(f)$.V.2.3 - Modification de la relation $I(\tau) = f(S_\phi(f))$ par le temps mort.

V.2.4 - Lois de variation .

V.2.5 - Précision des mesures.

V.3 - Banc de mesure.

VI - PURETE SPECTRALE

VI.1 - Définition.

VI.2 - Relation entre pureté spectrale et instabilité dans le domaine fréquence

VI.3 - Analyseur de spectre.

VII - ESTIMATION DES MESURES

VII.1 - Erreur systématique et erreur aléatoire.

VII.2 - Exemple de biais.

VII.2.1 - Biais introduit par la largeur de bande du filtre d'analyse.

VII.2.2 - Biais introduit par la variance d'échantillon $\sigma^2(N, \tau)$.

VII.3 - Erreur aléatoire - estimation de la moyenne.

VII.4 - Erreur aléatoire - estimation du carré.

VII.5 - Etude comparative des détecteurs linéaire et quadratique .

VII.5.1 - Détection linéaire.

VII.5.2 - Détection quadratique.

VII.5.3 - Comparaison des méthodes.

VII.5.4 - Détermination de $S_\phi(f)$.

ESTIMATION DE L'INSTABILITE DANS LE DOMAINE FREQUENCE

PAR DES MESURES TEMPORELLES (VARIANCE DE HADAMARD)

I - POSITION DU PROBLEME

page 54

I.1 - Introduction.

I.2 - Structure de la fonction de transfert d'Allan.

I.3 - Possibilités d'analyse spectrale avec des mesures temporelles.

II - LA VARIANCE DE HADAMARD

page 56

II.1 - Définition.

II.2 - Etude analytique.

II.2.1 - Fonction de transfert.

a) Calcul de $H_H(f)$.

b) Largeur de bande équivalente.

II.2.2 - Relation entre $\sigma_H^2(N,T,\tau)$ et $S_\phi(f)$.

II.2.3 - Limitation en fréquence.

a) Fréquence minimale d'analyse.

b) Fréquence maximale d'analyse.

II.2.4 - Etude de quelques cas particuliers.

a) Bruit blanc de fréquence.

b) Bruit blanc de phase.

c) Modèle lorentzien.

II.2.5 - Pondération des mesures.

a) Pondération de l'ensemble du processus de mesure.

b) Pondération pseudo-sinusoidale.

II.3 - Influence de la méthode de mesure sur le spectre à étudier.

II.3.1 - Relation entre $\sigma_H^2(N,T,\tau)$ et $R_\phi(\tau)$.

II.3.2 - Interprétation de la relation.

II.3.3 - Limitation de la variance de Hadamard en basse fréquence.

II.4 - Conclusion.

ESTIMATION DE L'INSTABILITE DANS LE DOMAINE TEMPS
PAR FILTRAGE DU BRUIT DE PHASE (VARIANCE PASSE-HAUT)

I - MESURE DES VARIANCES PAR FILTRAGE DU BRUIT DE PHASE

page 87

- I.1 - Introduction.
- I.2 - Schéma synoptique du processus de mesure.
- I.3 - Caractère "passe-haut" de la variance d'Allan.
- I.4 - Limitations des mesures : $\tau_{\min}$ - $\tau_{\max}$.
- I.5 - Précision des mesures.
 - I.5.1 - Détermination de l'estimateur $\langle \sigma_{PH}(\tau) \rangle$.
 - I.5.2 - Erreur aléatoire $\sigma(\delta)$ introduite par la durée finie des mesures.
 - I.5.3 - Détermination de $\sigma(\delta)$ en fonction du type de bruit.
- I.6 - Comparaison avec la méthode du comptage de fréquence.

II - BANC DE MESURE

page 101

- II.1 - Schéma synoptique.
- II.2 - Mélangeur d'entrée.
- II.3 - Etude du bruit dans les transistors.
 - II.3.1 - Introduction.
 - II.3.2 - Bruit dans les transistors.
 - II.3.2.1 - Schéma équivalent d'un transistor.
 - II.3.2.2 - Introduction des sources de bruit $\overline{e^2}$ et $\overline{i^2}$.
 - II.3.2.3 - Facteur de bruit.
- II.4 - Optimisation d'un préamplificateur faible bruit.
 - II.4.1 - R_S fixe et I_C variable.
 - II.4.2 - I_C fixe et R_S variable.
 - II.4.3 - I_C et R_S variables.
- II.5 - Description du banc de mesure.
 - II.5.1 - Banc de mesure.
 - II.5.2 - Filtres d'analyse.
 - II.5.3 - Déphaseur et analyseur de densité de probabilité.
 - II.5.4 - Problèmes de masse.

III.1 - Domaine temps.

III.2 - Domaine fréquence.

III.2.1 - Bruit de phase.

III.2.2 - Bruit d'amplitude.

C H A P I T R E I V

POSSIBILITES DE LA TECHNIQUE DE MESURE DU

DETECTEUR DE PHASE : RESULTATS EXPERIMENTAUX

I - <u>BRUIT RESIDUEL DU BANC DE MESURE</u>	page 136
I.a - Domaine fréquence.	
I.b - Domaine temps.	
II - <u>MESURE DE PILOTE A QUARTZ</u>	page 140
II.a - Domaine fréquence.	
II.b - Domaine temps.	
III - <u>MESURE DE V.C.O. (Voltage Control Oscillator)</u>	page 150
III.a - Asservissement - boucle de phase.	
III.b - Réalisation des mesures.	
IV - <u>INTERET DU BANC DE MESURE POUR DES GENERATEURS A GRANDE PURETE SPECTRALE</u> <u>(ex : SYNTHETISEURS)</u>	page 157
V - <u>MESURE DU BRUIT RESIDUEL DES CIRCUITS</u>	page 158
VI - <u>BANC DE MESURE HYPERFREQUENCE</u>	page 160
<u>CONCLUSION</u>	page 163

A N N E X E S

<u>ANNEXE A</u>	page 166
Calcul de la fonction de transfert de la variance de Hadamard.	
<u>ANNEXE B</u>	page 167
Calcul de Δf_1 (largeur des filtres de Hadamard).	
<u>ANNEXE C</u>	page 168
Calcul des valeurs a, b, c (variance de Hadamard).	
<u>ANNEXE D</u>	page 169
Développement de la relation : $E \left[\sigma_h^2(N, \tau, \tau) \right]$.	
<u>ANNEXE E</u>	page 170
Bruit dans les résistances.	
<u>ANNEXE F</u>	page 172
Bruit d'un condensateur.	
<u>ANNEXE G</u>	page 173
Rappel des différentes sources de bruit des transistors.	
a - Bruit ultime.	
b - Bruit en excès.	
<u>ANNEXE H</u>	page 176
Sources de bruit d'un transistor en émetteur-commun.	
<u>ANNEXE I</u>	page 178
Contribution des différents étages au bruit de sortie de l'amplificateur.	
<u>ANNEXE J</u>	page 180
Boucle d'asservissement en phase du 1er et 2ème ordre. Calcul des fonctions de transfert $H_O(f)$ et $H_R(f)$.	
<u>REFERENCES</u>	page 184

PRINCIPALES NOTATIONS

Signal issu d'un générateur : $v(t) = (A_0 + a(t)) \cos(\omega_0 t + \phi(t))$

A_0 amplitude du signal

ω_0 fréquence angulaire du signal (rd/s)

f_0 fréquence du signal (Hz)

$a(t)$ fluctuation d'amplitude

$\phi(t)$ fluctuation de phase

$\dot{\phi}(t)$ fluctuation de fréquence angulaire

Soit $x(t)$ une fonction aléatoire stationnaire :

$E[x(t)]$ espérance mathématique ou valeur moyenne de $x(t)$

$\sigma[x(t)]$ écart type de $x(t)$

$S_x(f)$ densité spectrale de $x(t)$

$R_x(\tau)$ fonction d'autocorrélation de $x(t)$

$S_x(f) \otimes S_y(f)$ convolution des densités spectrales $S_x(f)$ et $S_y(f)$

$H(f) = \text{T.F.}[h(t)]$ la fonction de transfert $H(f)$ = la transformée de Fourier
de la réponse impulsionnelle $h(t)$

$i(t)$ source de courant de bruit

$e(t)$ source de tension de bruit

$\sqrt{i^2}, \sqrt{e^2}$ valeur efficace par $\sqrt{\text{Hz}}$ de la source de bruit

I N T R O D U C T I O N

Dans le domaine de l'électronique, toutes les grandeurs macroscopiques (courant, tension, fréquence ...) sont affectées de fluctuations aléatoires inévitables liées aux propriétés intimes de la matière (caractère discontinu, mouvement aléatoire des porteurs de charge etc..). Ces fluctuations parasites, dénommées "bruits", limitent la connaissance exacte que l'on peut avoir de la grandeur considérée. Le bruit, bien que généralement très faible, limite les performances de nombreuses applications de l'électronique, d'où l'importance croissante prise par son analyse théorique et sa mesure expérimentale dans l'étude de nombreux systèmes. La nature aléatoire du bruit impose des méthodes mathématiques adaptées (théorie des fonctions aléatoires) et sa mesure nécessite généralement une instrumentation spécifique.

Les récents progrès de la technologie font qu'actuellement, de toutes les grandeurs physiques, la fréquence est de plusieurs ordres de grandeur, celle que l'on sait générer avec la plus grande stabilité et mesurer avec la plus grande précision.

Néanmoins, la fréquence du signal émis par tout oscillateur réel, même de la plus haute qualité, est affectée de fluctuations aléatoires très faibles créant une instabilité de fréquence à court terme.

Ce mémoire est consacré à l'étude de l'instabilité de fréquence à court terme et aux évolutions récentes des méthodes de mesure.

Le premier chapitre rappelle les concepts fondamentaux utilisés pour la caractérisation de l'instabilité à court terme qui peut être définie, soit dans le domaine fréquence (par des densités spectrales), soit dans le domaine temps (par des variances). A chacun de ces aspects correspond une instrumentation appropriée : analyseur de spectre B.F pour le domaine fréquence et fréquencemètre numérique pour le domaine temps.

Toutefois, des études sur les relations mathématiques entre les paramètres caractéristiques dans les deux domaines ont permis de montrer que l'instrumentation utilisée classiquement pour l'un des domaines, pouvaient être utilisée pour effectuer les mesures dans l'autre domaine. Ainsi, la variance de Hadamard dont une analyse théorique détaillée est présentée dans le second chapitre permet d'effectuer l'analyse spectrale très basse fréquence du bruit de fréquence, à partir des résultats de mesure fournis par un fréquencemètre.

Inversement, le concept de variance passe-haut conduit à un processus de mesure des variances par filtrage du bruit de phase ; le banc de mesure qui a été réalisé est étudié en détail dans le chapitre III.

Le chapitre IV décrit les possibilités de ce banc qui, outre la mesure du bruit des oscillateurs de très haute qualité , permet la mesure du bruit de certains composants.

Des résultats expérimentaux (bruit propre du banc, bruit d'un oscillateur à quartz, bruit d'un oscillateur contrôlé en tension) sont enfin présentés.

x

CHAPITRE I

CARACTERISATION DE L'INSTABILITE DE FREQUENCE

A COURT TERME DES OSCILLATEURS

	pages
I - Introduction.	12
II - Rappel sur les fonctions aléatoires.	13
III - Modèles statistiques d'un signal quasi-sinusoïdal.	20
IV - Instabilité dans le domaine fréquence.	22
V - Instabilité dans le domaine temps.	26
VI - Pureté spectrale.	37
VII - Estimation des mesures.	41

I - INTRODUCTION

L'étude théorique de l'instabilité de fréquence à court terme nécessite l'utilisation des fonctions aléatoires. Pour introduire, définir avec précision, et relier entre eux les paramètres caractéristiques de cette instabilité de fréquence, un court rappel de la théorie des fonctions aléatoires s'impose. Nous préciserons ainsi l'information contenue dans chaque paramètre et son intérêt pour la caractérisation des fluctuations de fréquence.

Un choix judicieux et une définition précise de ces paramètres est nécessaire : Le choix doit être judicieux car il conditionne la simplicité, ou la complexité, du processus de mesure ; la définition doit être précise afin de pouvoir interpréter et comparer sans ambiguïté des résultats expérimentaux d'origines diverses : par exemple, l'étude montrera que la bande passante du banc de mesure intervient dans la détermination des variances alors qu'on néglige souvent de la spécifier. Il faut insister, aussi, sur la nécessité d'utiliser une terminologie reconnue par tous, constructeurs et utilisateurs, théoriciens et expérimentateurs.

C'est en prenant en compte ces considérations que l'on peut définir une caractérisation adéquate de l'instabilité de fréquence à court terme due au bruit aléatoires.

II - RAPPEL SUR LES FONCTIONS ALEATOIRES

II.1 - Caractère aléatoire

Chaque observation d'une fonction aléatoire fournit un échantillon unique représentant l'une des possibilités qui peuvent être obtenues. A un instant t , les valeurs futures ne peuvent être prédites, malgré le temps d'observation déjà passé. On ne peut donc pas définir un signal aléatoire par une simple fonction du temps. Pour représenter le caractère aléatoire de la réalité physique, nous sommes amenés à caractériser les propriétés statistiques de ces signaux. Nous utiliserons donc des modèles mathématiques à structure probabiliste.

Bien que nous ne nous intéresserons qu'aux processus continus, nous verrons qu'il est difficile de définir parfaitement ces modèles du point de vue mathématique.

Une sinusoïde est entièrement définie par trois paramètres : amplitude, phase, fréquence. Un signal aléatoire ne pouvant être défini que par un nombre infini de paramètres, nous nous intéresserons aux propriétés statistiques permettant d'étudier la répartition de l'énergie dans le spectre des fréquences.

II.2 - Densité de probabilité

Considérons un instant t_1 auquel un signal aléatoire peut avoir une infinité de valeurs. Parmi celles-ci, nous en considérerons N . Nous en avons n_1 telles que $X_{n_1}(t_1) \leq x_1$. On obtient alors :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_1}{N} = P \{ X(t_1) \leq x_1 \}$$

P est la probabilité pour que $X(t_1)$ soit inférieur à x_1 . P dépend de deux variables $P = F(x_1, t_1)$. $F(x_1, t_1)$ est la fonction de répartition du signal. Elle sert à définir la densité de probabilité :

$$(1) \quad P(x_1, t_1) = \frac{\partial F(x_1, t_1)}{\partial x_1}$$

Si l'on s'intéresse aux propriétés d'un signal à deux instants, on utilisera la densité des probabilités à deux variables :

$$P(x_1, x_2, t_1, t_2)$$

Propriétés :

$P(x)$ est normalisé :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(x, t_1) dx = 1$$

La probabilité que le signal se situe entre x_1 et x_2 est donnée par :

$$\int_{x_1}^{x_2} P(x, t_1) dx$$

II.3 - Les moments et les moyennes temporelles

Les signaux aléatoires peuvent être caractérisés par leurs différents moments qui sont des moyennes statistiques. Les plus utilisées sont :

1° La valeur moyenne ou espérance mathématique ($E[\cdot]$)

$$(2) \quad \langle X(t_1) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 P(x_1, t_1) dx_1 = E[X(t_1)]$$

2° La moyenne quadratique :

$$(3) \quad \langle X^2(t_1) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1^2 P(x_1, t_1) dx_1 = E[X^2(t_1)]$$

3° La fonction d'autocorrélation (moment mixte du 2ème ordre)

$$(4) \quad \langle X(t_1) X(t_2) \rangle = \iint_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 P(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2$$

4° La variance (moment centré du 2ème ordre)

$$(5) \quad \sigma^2(X(t)) = \langle (X(t) - E[X(t)])^2 \rangle = \langle X^2(t) \rangle - \langle X(t) \rangle^2$$

En pratique, on ne dispose souvent que d'un échantillon particulier $X_1(t)$ sur lequel on effectue des moyennes temporelles :

1° Valeur moyenne ou composante continue du signal :

$$(6) \quad \overline{X_1(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} X_1(t) dt$$

2° Valeur quadratique ou puissance moyenne :

$$(7) \quad \overline{X_i^2(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} X_i^2(t) dt$$

3° Fonction d'autocorrélation :

$$(8) \quad R_{XX}(t_1 - t_2) = \overline{X(t_1) \cdot X(t_2)}$$

II.4 - Stationnarité d'une fonction aléatoire

Une fonction aléatoire est stationnaire lorsque les propriétés statistiques sont invariantes par rapport à un changement de l'origine des temps. Réf (1)
Les moments que nous utiliserons étant au plus du 2ème ordre, nous ne considérons que des fonctions stationnaires du second ordre (fonction dont le caractère stationnaire est vérifié jusqu'au 2ème ordre) :

$$(9) \quad \begin{cases} P(x_1, t_1) \text{ indépendant de } t_1. \\ P(x_1, x_2, t_1, t_2) = P(x_1, x_2, t_2 - t_1). \end{cases}$$

$E[X(t_1)]$ ne dépend plus de l'instant t_1 .

$E[X(t_1) X(t_2)]$ ne dépend que de $t_2 - t_1$.

Les mesures ayant une durée finie, nous ne disposons que d'échantillons finis du processus aléatoire. Il est donc difficile de vérifier expérimentalement la stationnarité. C'est pourquoi certains auteurs ont été amenés à considérer comme stationnaire un signal dont les propriétés ne varient pas de manière significative d'un échantillon à un autre.

Si la condition de stationnarité est vérifiée, l'expérimentateur utilise alors souvent sans démonstration une autre propriété : l'ergodicité. On pose à priori que les moyennes statistiques, $E[X(t)]$, sont égales aux moyennes temporelles, $\overline{X(t)}$. Réf (2).

Ces deux propriétés sont souvent utilisées sans être vérifiées car elles permettent de relier les résultats expérimentaux à des modèles mathématiques simples.

Nous insisterons dans le prochain chapitre sur certaines précautions à prendre.

II.5 - Autocorrélation

Soit $X(t)$ une fonction aléatoire stationnaire du second ordre; sa fonction d'autocorrélation temporelle s'écrit :

$$(10) \quad R_X(\tau, k) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} X_k(t) \cdot X_k(t + \tau) dt$$

Le processus étant supposé ergodique, nous avons $R_X(\tau, k) = R_X(\tau)$.

Les propriétés d'une fonction aléatoire du second ordre dépendent essentiellement des propriétés de sa fonction d'autocorrélation :

- $X(t)$ étant réelle : $R_X(\tau)$ est une fonction réelle.
- Pour $\tau = 0$: $R_X(0) = E[X^2(t)]$, $X(t)$ étant une fonction du second ordre, $R_X(0)$ doit être fini.
- Pour $X(t)$ stationnaire : $R_X(\tau) = R_X(-\tau)$.
- Pour $\tau \rightarrow \infty$: si la fonction est de moyenne nulle : $\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_X(\tau) = 0$.
- Si la fonction est de moyenne non nulle $E[X(t)]$: $\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_X(\tau) = E^2[X(t)]$.
- T.F. $[R_X(\tau)] = S_X(f) \geq 0$.

II.6 - Densité spectrale

Soit $Y(t)$ un signal périodique : son spectre de puissance indique la répartition de sa puissance entre les différentes harmoniques. Si la période est T_0 , le spectre aura des composantes aux fréquences $f_0 = \frac{1}{T_0}$, $2f_0$, ..., nf_0 .

On ne peut pas définir un tel spectre pour un signal aléatoire ; sa période étant infinie, l'écart entre les harmoniques serait nul. On définit alors une densité spectrale de puissance telle que sa surface totale représente la puissance du signal. Cette densité spectrale est la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation. (Réf (3)).

$$(11) \quad S_X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (\omega = 2\pi f)$$

Si $R_x(\tau)$ indique une bonne corrélation pour τ_0 , le signal aura une composante significative à la fréquence $f_0 = \frac{1}{\tau_0}$.

$S_x(f)$ donne rigoureusement les mêmes informations que $R_x(\tau)$.

Propriétés :

$R_x(\tau)$ étant pair et réel, $S_x(f)$ est donc pair et réel.

$S_x(f)$ est toujours positif.

$X(t)$ étant du second ordre, $S_x(f)$ doit être intégrable :

$$R_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) df \leq M$$

Unités : $S_x(f) : (x^2/Hz)$.

La densité de probabilité est un paramètre statistique qui donne des informations sur l'amplitude et qui est indépendant de la densité spectrale.

II.7 - Dérivation et intégration d'une fonction aléatoire

Il est utile de rappeler quelques propriétés mathématiques sur la dérivation et l'intégration des fonctions aléatoires, car nous rencontrerons souvent ces deux problèmes pour le passage des fluctuations de phase aux fluctuations de fréquence.

1° - Dérivation

Un processus aléatoire $X(t)$ est différentiable si sa fonction d'autocorrélation a une dérivée d'ordre 2, ($X(t)$ stationnaire) Réf (4):

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= \frac{dX(t)}{dt} \\ R_{\dot{X}}(\tau) &= -\frac{d^2 R(\tau)}{d\tau^2} \end{aligned} \quad (12)$$

Il en résulte la relation entre les densités spectrales :

$$S_{\dot{X}}(f) = 4\pi^2 f^2 S_X(f) \quad (13)$$

Si le processus $X(t)$ est du second ordre, sa densité spectrale doit être intégrable :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f) df \leq A$$

Le processus $\dot{X}(t)$ sera du second ordre si $S_{\dot{X}}(f)$ est intégrable :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S_{\dot{X}}(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} 4\pi^2 f^2 S_X(f) df \leq B$$

2° - Intégration

Si le processus $X(t)$ admet une primitive $Y(t)$, celle-ci n'est pas nécessairement stationnaire du second ordre.

Les densités spectrales étant reliées par l'égalité suivante :

$$S_Y(f) = \frac{S_X(f)}{4 \pi^2 f^2}$$

La primitive est stationnaire du second ordre lorsque :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S_Y(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_X(f)}{4 \pi^2 f^2} df \leq C$$

Les deux conditions de stationnarité que nous venons d'énoncer nous obligeront souvent à imposer arbitrairement des bornes inférieures et supérieures pour de nombreux modèles de densités spectrales. Ces bornes peuvent alors influencer sur les résultats, posant alors un problème délicat.

II.8 - Processus gaussien

II.8.1 - Définition

Une variable aléatoire x , de valeur moyenne m et de variance σ^2 est gaussienne si sa densité de probabilité est donnée par :

$$(14) \quad P(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

Une fonction aléatoire est gaussienne si pour chaque ensemble d'instants t_i , $(t_1, t_2; \dots, t_i, \dots, t_n)$, les variables aléatoires $x_i = x(t_i)$ ont une densité de probabilité gaussienne à n dimensions.

Nous utiliserons souvent, comme modèles, des processus gaussiens stationnaires du second ordre. Leurs fonctions de corrélation dépendent alors uniquement de $\tau = (t_1 - t_2)$; ces processus sont en outre stationnaires au sens strict. Supposons que nous ayons caractérisé des fluctuations aléatoires par les propriétés suivantes :

- a - fluctuations stationnaires du second ordre.
- b - densités de probabilité gaussienne.
- c - la densité spectrale étant : $S_X(f)$.

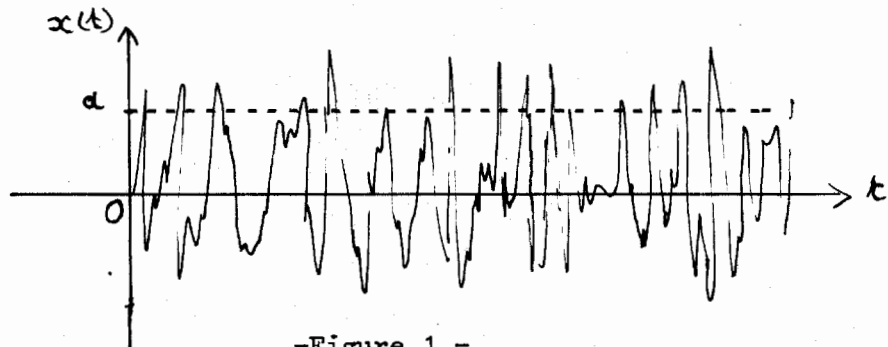
Du point de vue théorique, le processus est parfaitement défini.

L'importance des processus gaussiens est justifiée par le théorème de la limite centrale : sous certaines conditions, la densité de probabilité de la somme de N variables indépendantes tend vers la loi normale quand N augmente.

Pratiquement, un processus est gaussien s'il a pour origine la somme de N perturbations élémentaires indépendantes, N étant très grand. Réf (2).

II.8.2 - Propriétés des passages à un niveau donné

Considérons un processus gaussien $x(t)$. Soit $N(\tau, a)$ le nombre des passages au niveau a , pendant la durée τ ; $N(\tau, a)$ est un nombre aléatoire :



-Figure 1 -

Si le processus $x(t)$ est stationnaire, l'espérance mathématique $E[N(\tau, a)]$ est indépendant de l'instant considéré.

La référence (5) nous donne :

$$(15) \quad E[N(\tau, a)] = \frac{\tau}{\pi} \cdot \frac{\sigma_{\dot{x}}}{\sigma_x} e^{-\frac{a^2}{2\sigma_x^2}} \quad \dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

Soit par unité de temps :

$$E[N(a)] = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sigma_{\dot{x}}}{\sigma_x} e^{-\frac{a^2}{2\sigma_x^2}}$$

Cette loi sera utilisée pour vérifier expérimentalement le caractère gaussien d'une fonction aléatoire (voir chapitre III).

III - MODELES STATISTIQUES D'UN SIGNAL QUASI-SINUSOIDAL

III.1 - Expression analytique d'un signal réel

Pour représenter le signal issu d'un oscillateur réel, nous sommes conduits à introduire dans l'expression du signal sinusoïdal idéal, des paramètres de nature statistique. Ceux-ci caractérisent les perturbations aléatoires affectant l'amplitude et la fréquence du signal (bruit thermique, modulations aléatoires de phase par les transistors...). On introduit alors deux fonctions aléatoires indépendantes : $a(t)$ et $\dot{\phi}(t)$ qui représentent respectivement le bruit d'amplitude et le bruit de fréquence angulaire. Réf (6).

Le modèle choisi est à fréquence instantanée du second ordre ; la phase instantanée est définie par :

$$\phi(t) = \int_0^t \dot{\phi}(\tau) d\tau$$

Le signal réel s'écrit alors :

$$(16) \quad v(t) = [A_0 + a(t)] \cdot \cos\left(\omega_0 t + \int_0^t \dot{\phi}(\tau) d\tau\right)$$

III.2 - Propriétés du modèle

Afin de pouvoir utiliser les concepts simples de la théorie des fonctions aléatoires, $a(t)$ et $\dot{\phi}(t)$ seront supposées continues, stationnaires du second ordre, de moyenne nulle (l'expérience montre une dérive lente de la fréquence instantanée, nous considérerons toutefois que $\dot{\phi}(t)$ est stationnaire pendant une durée T).

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} E[\dot{\phi}(t)] = 0 \\ R_{\dot{\phi}}(\tau) = E[\dot{\phi}(t) \cdot \dot{\phi}(t+\tau)] \\ R_{\dot{\phi}}(0) = E[\dot{\phi}^2(t)] = \sigma_{\dot{\phi}}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\dot{\phi}}(f) df \leq K_{\dot{\phi}} \end{array} \right.$$

III.3 - Caractérisation de la stabilité des générateurs de fréquence

La nature et le niveau des fluctuations de fréquence, $\phi(t)$, peuvent être caractérisés dans le domaine temps et le domaine fréquence. Toutefois, le processus $\phi(t)$ n'étant pas directement accessible à la sortie d'un générateur de fréquence, on peut être amené à caractériser directement le signal $v(t)$ par sa pureté spectrale. Bien qu'il existe, sous certaines conditions, des relations directes entre la pureté spectrale et l'instabilité de fréquence, il faut néanmoins distinguer les deux concepts : le premier est relatif au signal complet $v(t)$, le deuxième au processus $\phi(t)$.

A priori, le nombre de paramètres utilisables n'est pas limité. Le choix d'un paramètre dépend de la quantité d'informations qu'il contient, mais aussi de la réalisation pratique de sa mesure expérimentale. La complexité de l'appareil et la durée de mesure nécessaire pour une précision donnée sont des facteurs importants.

L'instrumentation s'est développée autour de la mesure du signal $v(t)$: l'instabilité de fréquence dans le domaine temps est mesurable à l'aide d'un fréquencesmètre-calculateur qui permet le calcul de la variance de N mesures de fréquence. On effectue ainsi des mesures temporelles, les différents paramètres utilisés étant définis dans le paragraphe I.V.

Dans le domaine fréquence, l'appareil de mesure classique est l'analyseur de spectre qui donne directement la pureté spectrale du signal. On effectue des mesures par filtrage de fréquences. A partir de la pureté spectrale, on peut calculer l'instabilité de fréquence par une relation simple, (à la condition de disposer d'un analyseur de spectre à grande dynamique, Réf (7)).

Il faut donc disposer de deux instrumentations différentes pour caractériser complètement un générateur de fréquence. Les principes de ces deux méthodes reposent sur des relations différentes et le passage d'un domaine à l'autre est souvent délicat. Le tableau I ci-dessous rappelle les démarches classiques pour caractériser un générateur.

Nature des mesures	Mesures temporelles par comptage de fréquence	Mesures par filtrage de fréquence
Caractérisation du bruit d'un générateur	Instabilité dans le domaine temps	Pureté spectrale

Tableau [I]

Dans le deuxième chapitre, nous étudierons une méthode d'analyse spectrale du bruit de fréquence, basée sur des mesures temporelles. Cette méthode nous permettra de mieux comprendre les liens entre instabilité dans les domaines temps et fréquence.

Les mesures temporelles sont généralement longues et nécessitent un appareillage spécifique (compteur, calculateur). Nous présenterons dans le chapitre III une nouvelle méthode de mesure basée sur le filtrage du processus $\phi(t)$. Ces mesures nous permettront de caractériser les générateurs dans les deux domaines : temps et fréquence. L'instrumentation sera ainsi unifiée. Le tableau I devient alors :

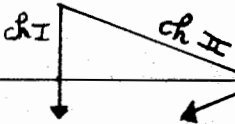
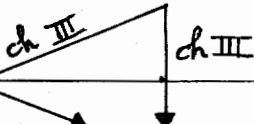
Nature des mesures	Mesures temporelles par comptage de fréquence		Mesures par filtrage de fréquence	
			du bruit de phase	du signal
Caractérisation du bruit d'un générateur				
	Instabilité dans le domaine temps		Instabilité dans le domaine fréquence	
	↑ — — — ch I		— — — ↑ — — — ch I	
			Pureté spectrale	
			↑ — — — ch I	

Tableau [II]

Les résultats expérimentaux du dernier chapitre nous permettront de comparer les différentes méthodes.

IV - INSTABILITE DANS LE DOMAINE FREQUENCE

IV.1 - Densités spectrales

Les propriétés statistiques des fluctuations de phase peuvent être spécifiées par leur densité spectrale, notée $S_{\phi}(f)$. Si le processus est gaussien et stationnaire du second ordre, nous savons, d'après la théorie des fonctions aléatoires, que la connaissance de ce spectre nous permet de caractériser complètement le bruit de phase. Toutes les informations sont contenues dans ce spectre.

Les propriétés d'un tel spectre ont déjà été énoncées. Nous préciserons seulement que, bien que son domaine de définition s'étende de $+\infty$ à $-\infty$, c'est surtout un spectre basse fréquence. $S_\phi(f)$ est un spectre bilatéral et pair :

$$\sigma^2[\phi(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} S_\phi(f) df = 2 \int_0^{+\infty} S_\phi(f) df$$

Les mesures expérimentales donnent un spectre unilatéral : $S_\phi^{(u)}(f)$ tel que :

$$\sigma^2[\phi(t)] = 2 \int_0^{+\infty} S_\phi(f) df = \int_0^{+\infty} S_\phi^{(u)}(f) df$$

$$(18) \quad \begin{cases} S_\phi^{(u)}(f) = 2 [S_\phi(f)] & f \geq 0 \\ S_\phi^{(u)}(f) = 0 & f < 0 \end{cases}$$

Il est utile de définir d'autres densités spectrales :

- $S_\phi(f)$: densité spectrale des fluctuations de fréquence angulaire

$$S_\phi(f) = 4\pi^2 f^2 S_\phi(f). \quad ((\text{rd/s})^2/\text{Hz})$$

- $S_y(f)$: densité spectrale des fluctuations de fréquence relative. (1/Hz)

$$y(t) = \frac{\dot{\phi}(t)}{2\pi\nu_0} \quad S_y(f) = \frac{S_\phi(f)}{(2\pi\nu_0)^2} = \frac{f^2}{\nu_0^2} S_\phi(f)$$

IV.2 - Modèles de spectre

Il est intéressant d'étudier les différents modèles de densités spectrales susceptibles de représenter le bruit affectant les générateurs de fréquence. Les résultats expérimentaux et l'analyse théorique conduisent à décomposer la densité spectrale des fluctuations de fréquence en une somme de composantes en f^α :

$$(19) \quad S_\phi(f) = K_0 f^2 + K_1 f + K_2 + \frac{K_3}{f} + \frac{K_4}{f^2}$$

Les circuits électroniques ayant toujours une bande passante finie, nous introduirons une fréquence de coupure supérieure : f_H .

a - $S_{\dot{\phi}}(f) = k_0 f^2$ (bruit thermique additif externe).

les fluctuations de fréquence $\dot{\phi}(t)$ sont du second ordre :

$$\sigma_{\dot{\phi}}^2 = \int_0^{F_H} S_{\dot{\phi}}(f) df = \int_0^{F_H} K_0 f^2 df = \frac{K_0 F_H^3}{3} \leq K_{\dot{\phi}}$$

les fluctuations de phase $\phi(t)$ sont aussi stationnaires du second ordre :

$$S_{\phi}(f) = \frac{S_{\dot{\phi}}(f)}{4\pi^2 f^2} = \frac{K_0}{4\pi^2} \quad (\text{bruit blanc de phase})$$

$$\sigma_{\phi}^2 = \int_0^{F_H} \frac{K_0}{4\pi^2} df = \frac{K_0 F_H}{4\pi^2} \leq K_{\phi}$$

b - $S_{\dot{\phi}}(f) = k_1 f$ (modulation de phase par les transistors).

$S_{\dot{\phi}}(f) = k_2$ (bruit thermique interne additif).

$\dot{\phi}(t)$ est du second ordre pour les deux modèles mais les fluctuations de phase ne sont pas du second ordre, il faut introduire une fréquence de coupure basse F_b .

$$S_{\phi}(f) = \frac{K_1 f}{4\pi^2 f^2} = \frac{K_1}{4\pi^2 f} \quad (\text{bruit flicker de phase})$$

$$S_{\phi}(f) = \frac{K_2}{4\pi^2 f^2} \quad (\text{random walk de phase})$$

$$\sigma_{\phi}^2 = \int_0^{F_H} \frac{K_1}{4\pi^2 f} df \rightarrow \infty \quad \sigma_{\phi}^2 = \int_0^{F_H} \frac{K_2}{4\pi^2 f^2} df \rightarrow \infty$$

L'introduction de la fréquence de coupure F_b lève cette difficulté.

$$\sigma_{\phi}^2 = \int_{F_b}^{F_H} \frac{K_1}{4\pi^2 f} df = \frac{K_1}{4\pi^2} \cdot \log\left(\frac{F_H}{F_b}\right) \leq K_{\phi}$$

$$\sigma_{\phi}^2 = \int_{F_b}^{F_H} \frac{K_2}{4\pi^2 f^2} df = \frac{K_2}{4\pi^2} \left[\frac{F_H - F_b}{F_H F_b} \right] \leq K_{\phi}$$

$$c - S_{\phi}(f) = \frac{k_3}{f} \quad (\text{flicker de fréquence dû aux variations des éléments déterminant la fréquence}).$$

$$S_{\phi}(f) = \frac{k_4}{f^2} \quad (\text{random walk de fréquence}).$$

Il faut introduire une fréquence de coupure F_b pour que les fluctuations de fréquence soient du second ordre :

$$\sigma_{\phi}^2 = \int_0^{f_H} \frac{K_3 df}{f} \rightarrow \infty$$

$$\sigma_{\phi}^2 = \int_{F_b}^{f_H} \frac{K_3 df}{f} = K_3 \log\left(\frac{f_H}{F_b}\right) \leq K_{\phi}$$

$$\sigma_{\phi}^2 = \int_0^{f_H} \frac{K_4 df}{f^2} \rightarrow \infty$$

$$\sigma_{\phi}^2 = \int_{F_b}^{f_H} \frac{K_4 df}{f^2} = K_4 \left[\frac{f_H - F_b}{F_b f_H} \right] \leq K_{\phi}$$

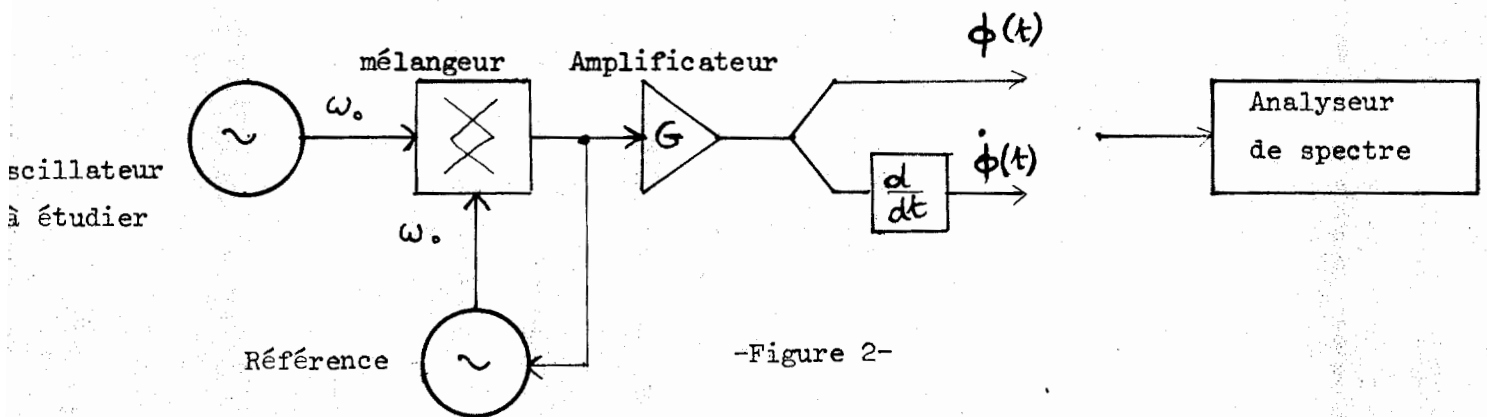
Les fluctuations de phase sont du second ordre du fait de l'introduction de la fréquence de coupure F_b .

Contrairement à f_H qui s'introduit simplement, la fréquence de coupure basse F_b est toujours très délicate à déterminer. C'est ainsi que l'on sera amené à utiliser des paramètres indépendants de cette fréquence.

Fluctuations de fréquence	$S_{\phi}(f)$	Domaine de définition	Fluctuations de phase	Domaine de définition	$S_{\phi}(f)$
bruit blanc	$k_0 f^2$	$0 - f_H$	bruit blanc	$0 - f_H$	$k_0/4\pi^2$
	$k_1 f$	$0 - f_H$	bruit flicker	$F_b - f_H$	$k_1/4\pi^2 f$
	k_2	$0 - f_H$	random walk	$F_b - f_H$	$k_2/4\pi^2 f^2$
bruit flicker	k_3/f	$F_b - f_H$		$F_b - f_H$	$k_3/4\pi^2 f^3$
random walk	k_4/f^2	$F_b - f_H$		$F_b - f_H$	$k_4/4\pi^2 f^4$

Tableau [III]

IV.3 - Banc de mesure (Voir chapitre III).



Un comparateur de phase permet de démoduler les fluctuations de phase de l'oscillateur à étudier, la référence étant asservie en quadrature. Les densités spectrales $S_\phi(f)$ et $S_{\dot{\phi}}(f)$ sont obtenues par l'analyse spectrale basse fréquence des processus $\phi(t)$ et $\dot{\phi}(t)$.

V - INSTABILITE DANS LE DOMAINE TEMPS

V.1 - Définition du paramètre $I(\tau)$

V.1.1 - Définition

La fréquence angulaire instantanée d'un signal s'écrit :

$$(20) \quad \omega(t) = \omega_0 + \dot{\phi}(t)$$

La mesure pendant une durée τ de cette fréquence donne la valeur moyenne :

$$(21) \quad \omega_\tau(t) = \omega_0 + \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} \dot{\phi}(t) dt = \omega_0 + \langle \dot{\phi}(t) \rangle_\tau$$

En effectuant N mesures, nous obtenons N échantillons de la variable aléatoire $\langle \dot{\phi}(t) \rangle_\tau$ de moyenne nulle :

$$E[\dot{\phi}(t)] = 0 \quad \Rightarrow \quad E[\langle \dot{\phi}(t) \rangle_\tau] = 0$$

Si nous notons $\sigma [\langle \dot{\phi}(t) \rangle_{\tau}]$ l'écart type de cette variable aléatoire, nous savons que :

$$\text{Probabilité } \left\{ \left| \langle \dot{\phi}(t) \rangle_{\tau} \right| \leq 3 \sigma [\langle \dot{\phi}(t) \rangle_{\tau}] \right\} \simeq 1$$

(en considérant la variable aléatoire gaussienne).

Nous pouvons alors définir un paramètre sans dimension : $I(\tau)$, représentant l'instabilité de fréquence (relative) sur un temps τ : (Réf (8))

$$\frac{\omega_{\tau}}{\omega_0} = 1 + \frac{\langle \dot{\phi}(t) \rangle_{\tau}}{\omega_0}$$

(22)

$$I(\tau) = \sigma \left[\frac{\omega_{\tau}}{\omega_0} \right] = \frac{\sigma [\langle \dot{\phi}(t) \rangle_{\tau}]}{\omega_0}$$

Remarques :

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} I(\tau) = \frac{\sigma [\dot{\phi}(t)]}{\omega_0} = \frac{\sqrt{\dot{\phi}^2(t)}}{\omega_0}$$

Le processus $\dot{\phi}(t)$ étant du second ordre, $I(0)$ doit être fini.

- Théoriquement, $\lim_{\tau \rightarrow \infty} I(\tau) = 0$ lorsque $\dot{\phi}(t)$ est stationnaire. Expérimentalement, les dérives systématiques de fréquence font diverger les résultats pour τ supérieur à quelques dizaines de secondes (ce temps est variable selon les générateurs). Nous sommes alors amenés à considérer l'instabilité à court terme où le bruit aléatoire prédomine et l'instabilité à long terme où les dérives systématiques masquent les fluctuations aléatoires.

V.1.2 - Relation entre $I(\tau)$, $R_{\phi}(\tau)$, $S_{\phi}(f)$

Le paramètre $I(\tau)$ est un moment du second ordre. Il existe donc des relations entre $I(\tau)$ et d'autres fonctions du 2ème ordre telles que $R_{\phi}(\tau)$ et $S_{\phi}(f)$. ($\phi(t)$ étant supposé stationnaire). Réf (8).

$$I^2(\tau) = \frac{\sigma^2 [\langle \dot{\phi}(t) \rangle_{\tau}]}{\omega_0^2}$$

$$\sigma^2 [\langle \dot{\phi}(t) \rangle_{\tau}] = E [\langle \dot{\phi}(t) \rangle_{\tau}^2] = E \left[\left(\frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} \dot{\phi}(t) dt \right)^2 \right]$$

$$\sigma^2 [\langle \dot{\phi}(t) \rangle_{\tau}] = \frac{1}{\tau^2} E [(\phi(t+\tau) - \phi(t))^2] = \frac{2}{\tau^2} [R_{\phi}(0) - R_{\phi}(\tau)]$$

Les fluctuations de phase étant stationnaires, on obtient la relation suivante :

$$(23) \quad I(\tau) = \frac{\sqrt{2}}{\omega_0 \tau} \left[R_{\phi}(0) - R_{\phi}(\tau) \right]^{\frac{1}{2}}$$

La fonction d'autocorrélation est la transformée de Fourier inverse de la densité spectrale :

$$R_{\phi}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\phi}(f) \cdot \cos \omega \tau \, df \quad \omega = 2\pi f$$

$I(\tau)$ s'exprime donc simplement en fonction de $S_{\phi}(f)$:

$$I(\tau) = \frac{\sqrt{2}}{\omega_0 \tau} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} S_{\phi}(f) \cdot [1 - \cos \omega \tau] \, df \right]^{\frac{1}{2}}$$

soit :

$$(24) \quad I(\tau) = \frac{2}{\omega_0 \tau} \left[\int_0^{+\infty} S_{\phi}^{(u)}(f) \cdot \sin^2(\pi \tau f) \, df \right]^{\frac{1}{2}}$$

Une valeur particulière $I(\tau_0)$ est liée à la puissance de bruit dans la bande passante de la fonction $\sin(\pi \tau_0 f)$. La connaissance de la densité spectrale $S_{\phi}(f)$ permet ainsi de déterminer entièrement le paramètre $I(\tau)$. Cette remarque fondamentale sera à la base d'un nouveau processus de mesure. Il faut noter que cette relation ne peut généralement pas être inversée. Réf (8).

Si l'on ne veut pas faire d'hypothèse sur la stationnarité de la phase, seule la relation suivante est justifiée ($\phi(t)$ étant lui stationnaire) :

$$(25) \quad I(\tau) = \frac{1}{\omega_0} \left[\int_0^{+\infty} S_{\phi}^{(u)}(f) \cdot \left(\frac{\sin \pi \tau f}{\pi \tau f} \right)^2 \, df \right]^{\frac{1}{2}}$$

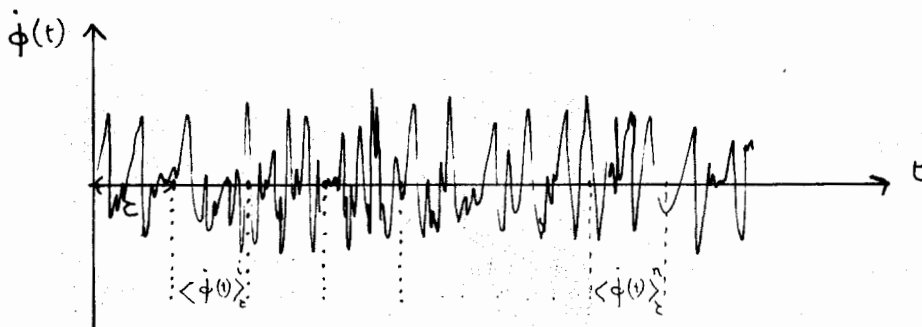
V.1.3 - Détermination expérimentale

Expérimentalement, deux procédés de mesure peuvent être utilisés :

- on mesure N fois la fréquence du signal $v(t)$ pendant une durée τ , puis on calcule l'écart type des N résultats. Réf (9).

$$(26) \quad \sigma_w^2(N, \tau) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \left(\langle \omega(t) \rangle_{\tau, i} - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \langle \omega(t) \rangle_{\tau, j} \right)^2$$

Les fluctuations de fréquence $\dot{\phi}(t)$ ayant été extraites du signal, on effectue N moyennes de durée τ le long de ce processus ; puis, on calcule l'écart type de ces N moyennes.



-Figure 3 -

$$(27) \quad \sigma_{\dot{\phi}}^2(N, \tau) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \left(\langle \dot{\phi}(t) \rangle_{\tau, i} - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \langle \dot{\phi}(t) \rangle_{\tau, j} \right)^2$$

Sachant que $\langle \omega(t) \rangle_{\tau} = \omega_0 + \langle \dot{\phi}(t) \rangle_{\tau}$, il est évident que $\sigma_{\omega}(N, \tau) = \sigma_{\dot{\phi}}(N, \tau)$. $\sigma_{\omega}(N, \tau)$ et $\sigma_{\dot{\phi}}(N, \tau)$ sont des estimations du paramètre théorique $I(\tau)$.

$$I(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sigma_{\dot{\phi}}(N, \tau)}{\omega_0}$$

La précision de cette estimation en fonction du nombre de mesures N a été étudiée par certains auteurs, (Ref 8-10).

V.1.4 - Lois de variation

Nous avons étudié dans le paragraphe IV.2 les différents modèles de spectre utilisés pour représenter le bruit des générateurs de fréquence. Il est maintenant intéressant d'en déduire les lois de variation du paramètre $I(\tau)$. Ces résultats bien connus ont été reportés dans le tableau IV qui permet d'interpréter facilement, dans le domaine fréquence, les résultats du domaine temps. Nous imposons aux fluctuations de fréquence une bande passante finie (fréquence de coupure supérieure f_H). La validité de ces relations sera étudiée dans le paragraphe suivant.

$S_{\phi}(f)$	$\sigma_{\phi}^2(N, \tau)$	$I(\tau)$ $N \rightarrow \infty$
$k_0 f^2$	$K_0 \frac{N+1}{N (2\pi)^2} \cdot \frac{2 f_H}{\tau^2}$	$\alpha \frac{1}{\tau}$
$k_1 f$	$\frac{K_1}{\tau^2} \frac{2(N+1)}{N (2\pi)^2} \left[\frac{3}{2} + \ln 2\pi f_H \tau - \ln \left(\frac{N}{N^2-1} \right) \right]$	$\approx \frac{1}{\tau}$
k_2	$\frac{K_2}{2\tau}$	$\alpha \frac{1}{\sqrt{\tau}}$
k_3/f	$K_3 \frac{N \ln N}{N-1}$	∞
k_4/f^2	$K_4 \frac{(2\pi)^2 N \tau}{1\tau}$	∞

Tableau [IV]

V.1.5 - Divergence pour certains modèles

La relation $I(\tau) = \frac{1}{\omega_0} \left[\int_{-\infty}^{\infty} S_{\phi}(f) \left(\frac{\sin \pi \tau f}{\pi \tau f} \right)^2 df \right]^2$ nécessite la stationnarité du processus $\phi(t)$. Aucune hypothèse de stationnarité n'a été faite sur les fluctuations de phase.

Or, $\phi(t)$ stationnaire du second ordre entraîne : $\lim_{\tau \rightarrow \infty} I(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left[\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma(N, \tau) \right] = 0$;

En considérant les relations du tableau [IV] précédent, nous pouvons remarquer que pour deux modèles de densité spectrale, le paramètre $I(\tau)$ diverge :

$$S_{\phi}(f) \begin{cases} = k_3/f \\ = k_4/f^2 \end{cases} \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} I(\tau) \neq 0.$$

Nous avons vu dans le paragraphe IV.2 que ces deux modèles de densité spectrale nécessitent une fréquence de coupure basse, F_b , pour rendre le processus $\phi(t)$ stationnaire du second ordre. La relation entre $I(\tau)$ et $S_{\phi}(f)$ ayant été établie sans cette limite (F_b), les résultats divergent pour ces modèles.

$S_{\dot{\phi}}(f)$	Limites	Fluctuations de fréquence	$\lim_{\tau \rightarrow \infty} I(\tau)$
$k_0 f^2$	$0 - f_H$	processus du second ordre	0
$k_1 f$	$0 - f_H$	processus du second ordre	0
k_2	$0 - f_H$	processus du second ordre	0
k_3/f	$0 - f_H$	processus non du second ordre	∞ *
k_4/f^2	$0 - f_H$	processus non du second ordre	∞

* diverge en fonction de N.

Tableau [V]

V.2 - Variance d'Allan

V.2.1 - Définition

La variance d'Allan a été introduite afin de simplifier le processus de mesure de l'instabilité dans le domaine temps et de permettre la convergence des intégrales pour les spectres en $\frac{1}{f^\alpha}$ ($\alpha = 1, 2$). Réf (10-11).

La variance d'échantillon est donnée par la relation :

$$(28) \quad \sigma_{\dot{\phi}}^2(N, \tau) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \left(\langle \dot{\phi}(t) \rangle_{\tau_i} - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \langle \dot{\phi}(t) \rangle_{\tau_j} \right)^2$$

La variance d'Allan utilise cette définition avec $N = 2$ et un temps mort nul entre les mesures adjacentes :

$$(29) \quad \sigma_{\dot{\phi}}^2(2, \tau) = \frac{1}{2} \left(\langle \dot{\phi}(t) \rangle_{\tau_i} - \langle \dot{\phi}(t) \rangle_{\tau_{i+1}} \right)^2$$

La quantité $\sigma_{\phi}^2(2, \tau)$ étant une variable aléatoire, il faut faire une moyenne sur M mesures. Les résultats que nous allons étudier concernent l'espérance mathématique de $\sigma_{\phi}^2(2, \tau)$ qui est la variance d'Allan :

$$E \left[\sigma_{\phi}^2(2, \tau) \right] = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left(\sigma_{\phi}^2(2, \tau) \right)_i$$

(La variance normalisée étant : $\sigma_y^2(\tau) = \frac{E[\sigma_{\phi}^2(2, \tau)]}{\omega_0^2}$).

V.2.2 - Relation entre $E[\sigma_{\phi}^2(2, \tau)]$ et $R_{\phi}(\tau)$, $S_{\phi}(f)$

Le paramètre fondamental des propriétés statistiques (pour les moments d'ordre 2) du bruit étant la densité spectrale $S_{\phi}(f)$, il est nécessaire d'établir la relation $E[\sigma_{\phi}^2(2, \tau)] = F[S_{\phi}(f)]$ pour pouvoir étudier les propriétés statistiques de la variance d'Allan.

$$E[\sigma_{\phi}^2(2, \tau)] = \frac{1}{2} \overline{\left(\langle \dot{\phi}(t) \rangle_{\tau, i} - \langle \dot{\phi}(t) \rangle_{\tau, i+1} \right)^2} = \overline{\langle \dot{\phi}(t) \rangle_{\tau}^2} - \overline{\langle \dot{\phi}(t) \rangle_{\tau} \langle \dot{\phi}(t) \rangle_{\tau+2\tau}}$$

$$E[\sigma_{\phi}^2(2, \tau)] = \frac{1}{\tau^2} \left[3 R_{\phi}(0) - 4 R_{\phi}(\tau) + R_{\phi}(2\tau) \right]$$

Sachant que par définition : $R_{\phi}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\phi}(f) \cos(2\pi\tau f) df$

On obtient :

$$E[\sigma_{\phi}^2(2, \tau)] = \frac{1}{\tau^2} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\phi}(f) \left[3 - 4 \cos(2\pi\tau f) + \cos(4\pi\tau f) \right] df$$

$$(30) \quad E[\sigma_{\phi}^2(2, \tau)] = \frac{8}{\tau^2} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\phi}(f) \sin^4(\pi\tau f) df$$

Si on ne veut pas faire l'hypothèse de la stationnarité de la phase, on obtient la relation suivante :

$$(31) \quad E[\sigma_{\phi}^2(\tau, \tau)] = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\phi}(f) \left(\frac{\sin^2 \pi \tau f}{\pi \tau f} \right)^2 df$$

Remarque : les deux variances $\sigma_{\phi}^2(\infty, \tau)$ et $\sigma_{\phi}^2(2, \tau)$ sont reliées à la densité spectrale $S_{\phi}(f)$ par deux fonctions de transfert :

$$(32) \quad \begin{aligned} |H_1(f)| &= |\sin(\pi \tau f)| \\ |H_2(f)| &= |\sin^2(\pi \tau f)| \end{aligned}$$

La différence fondamentale entre ces deux filtres est la différence de leurs pentes à l'origine ($f \rightarrow 0$). Nous étudierons ce problème dans un prochain paragraphe.

V.2.3 - Modification de la relation $I(\tau) = f(S_{\phi}(f))$ par le temps mort

Les compteurs utilisés pour les mesures de variance introduisent toujours un temps mort T_M entre deux mesures successives. Il est important de connaître l'influence de T_M sur la fonction de transfert, sachant que le rapport $\frac{T_M}{\tau}$ peut varier dans de grandes proportions. Réf (12).

Pour $T_M = 0$, nous avons : $|H_2(f)|^2 = \sin^4(\pi \tau f)$

Pour $T_M \neq 0$, on montre facilement que la nouvelle fonction de transfert s'écrit :

$$(33) \quad |H_{T_M}(f)|^2 = \sin^2 \pi (T_M + \tau) f \cdot \sin^2 \pi \tau f$$

Supposons que nous mesurons du bruit blanc de phase

$$S_{\phi}^{(u)}(f) = K_0$$

$$T_M = 0 \quad \sigma_{\phi}^2(\tau, \tau, \tau) = \frac{8}{\tau^3} \int_0^{F_H} K_0 \sin^4 \pi \tau f df = \frac{8 K_0}{\pi \tau^3} \int_0^{\pi \tau F_H} \sin^4 X dX \approx \frac{3 K_0 F_H}{\tau^3}$$

$$T_M \neq 0 \quad \sigma_{\phi}^2(\tau, T, \tau) = \frac{8}{\tau^3} \int_0^{F_H} K_0 \sin^2 \pi (T_M + \tau) f \cdot \sin^2 \pi \tau f df$$

où l'on a : $T = T_M + \tau$

pour la valeur $T_M = \tau$

$$\sigma_{\phi}^2(2, 2\tau, \tau) = \frac{8 K_0}{\pi \tau^3} \int_0^{f_H} \sin^2 2X \cdot \sin^2 X \, dX = \frac{2 K_0 f_H}{\tau^2}$$

(34) On peut définir un biais :

$$b = \frac{\sigma_{\phi}^2(2, 2\tau, \tau)}{\sigma_{\phi}^2(2, \tau, \tau)} = \frac{2}{3}$$

On peut montrer que $b = \frac{2}{3}$ quel que soit le temps mort T_M . Ce cas est intéressant car on le rencontrera souvent en pratique : $S_{\phi}(f)$ blanc et $T_M > 0 \Rightarrow b = \frac{2}{3}$.

V.2.4 - Lois de variation

La densité spectrale $S_{\phi}(f)$ étant définie de 0 à f_H , la variance d'Allan ($N = 2$) lève la difficulté dans le cas des deux modèles non stationnaires pour lesquels :

$$I(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sigma(N, \tau) \rightarrow \infty$$

Ces modèles n'étant toutefois toujours pas stationnaires du second ordre, la variance d'Allan ne tendra pas vers 0 pour τ infini. Ces difficultés résultent du fait que les deux modèles ne sont pas physiquement réalistes, seule la détermination d'une fréquence de coupure basse, F_b , peut résoudre le problème. Les expressions de $\sigma_{\phi}^2(2, \tau)$ pour le spectre en loi de puissance sont rappelées dans le tableau VI ci-dessous. Celui-ci permet d'interpréter rapidement, dans le domaine fréquence, les résultats expérimentaux du domaine temps.

$S_{\phi}(f)$	$\sigma_{\phi}^2(2, \tau)$	$\lim_{\tau \rightarrow \infty}$	Stationnarité du processus $\phi(t)$
$K_0 f^2$	$K_0 \frac{3 F_H}{(2\pi)^2 \tau^2}$	0	stationnarité du second ordre
$K_1 f$	$\frac{K_1}{(2\pi)^2 \tau^2} \left[\frac{9}{2} + 3 \ln(2\pi \tau f_H) - \ln 2 \right]$	0	stationnarité du second ordre
K_2	$\frac{K_2}{2\tau}$	0	stationnarité du second ordre
K_3 / f	$K_3 2 \ln 2$	k	non stationnarité du second ordre
K_4 / f^2	$K_4 \frac{(2\pi)^2 \tau}{6}$	∞	non stationnarité du second ordre

Tableau [VI]

V.2.5 - Précisions des mesures

La variance d'Allan est actuellement le paramètre le plus généralement utilisé pour mesurer l'instabilité dans le domaine temps. $\sigma_{\phi}^2(2, \tau)$ étant une variable aléatoire, sa moyenne $E[\sigma_{\phi}^2(2, \tau)]$ est estimée à l'aide de m mesures par la relation :

$$\hat{\sigma}_m^2(2, \tau) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (\sigma_{\phi}^2(2, \tau))_i$$

$\hat{\sigma}_m^2(2, \tau)$ est aussi une variable aléatoire, sa moyenne est égale à celle du paramètre $\sigma_{\phi}^2(2, \tau)$: $E[\hat{\sigma}_m^2(2, \tau)] = E[\sigma_{\phi}^2(2, \tau)]$.

$\sigma[\hat{\sigma}_m^2]$ est l'écart type de l'ensemble $\{\sigma_m^2\}$; ce paramètre permet le calcul de la précision des mesures. Les résultats obtenus par P. Lesage ont été reportés dans le tableau [VII] ci-dessous : (Réf (13)).

$S_{\phi}(f)$	$\sigma_{\phi}^2(2, \tau)$	$\sigma^2[\hat{\sigma}_m^2(2, \tau)]$
$k_0 f^2$	$\frac{k_0 3 F_H}{(2\pi)^2 \tau^2}$	$\sigma_{k_0}^2 \cdot \frac{35m - 53}{9(m-1)^2}$
$k_1 f$	$\frac{3 k_1 L_n 2\pi \tau F_H}{\pi^2 \tau^2}$	$\sigma_{k_1}^2 \cdot \frac{35m - 53}{9(m-1)^2}$
k_2	$\frac{k_2}{2\tau}$	$\sigma_{k_2}^2 \cdot \frac{3m - 4}{(m-1)^2}$
k_3/f	$k_3 2 \ln 2$	$\sigma_{k_3}^2 \cdot \frac{5,7m - 31}{(m-1)^2}$
k_4/f^2	$\frac{k_4 (2\pi)^2 \tau}{6}$	$\sigma_{k_4}^2 \cdot \frac{9m - 10}{4(m-1)^2}$

Tableau [VII]

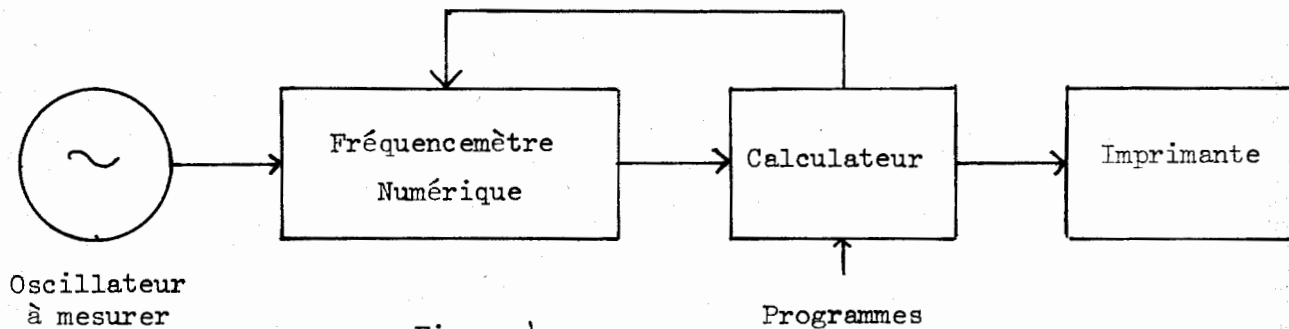
Remarque :

lorsque m est très grand :

$$\frac{\sigma[\hat{\sigma}_m^2(2, \tau)]}{\sigma_{\phi}^2(2, \tau)} \propto \frac{1}{\sqrt{m}}$$

V.3 - Banc de mesure

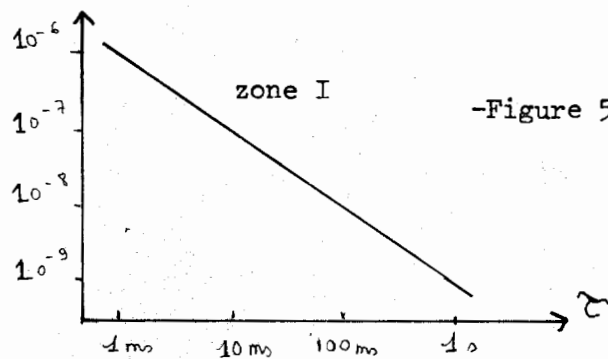
Le banc de mesure classiquement utilisé pour déterminer les différentes variances (Allan, variance vraie) comporte principalement un fréquencesmètre et un calculateur.



-Figure 4 -

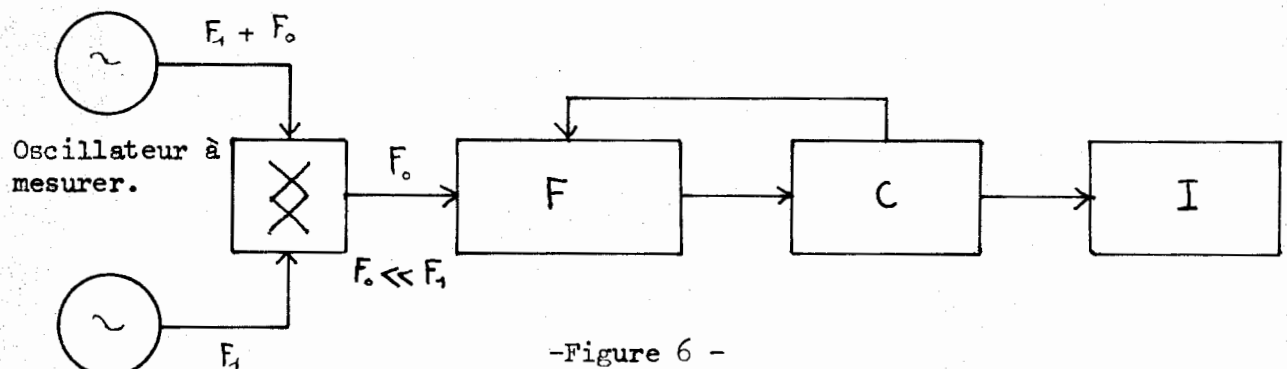
La résolution de ce banc de mesure dépend de la précision du fréquencesmètre. La courbe de précision est fonction du temps d'intégration :

Exemple : $\frac{\Delta F}{F}$



-Figure 5 -

Si l'instabilité de l'oscillateur à étudier est située dans la zone I, on pourra la mesurer directement. Si l'on veut mesurer un générateur ultra-stable, il faudra utiliser une méthode indirecte car sa stabilité sera meilleure que la courbe de précision du fréquencesmètre. La mesure indirecte nécessite un oscillateur de référence avec lequel on fait battre l'oscillateur à étudier.



-Figure 6 -

Sachant que $\sigma_1(\tau) = \frac{\Delta f \tau}{f_1}$, on augmente l'instabilité relative en transposant les fluctuations autour d'une fréquence plus basse f_0 . L'oscillateur de référence doit être plus stable que l'oscillateur à étudier, afin que les fluctuations de fréquence de f_0 proviennent uniquement de l'oscillateur à étudier.

Les avantages et les inconvénients de cette méthode seront étudiés dans le dernier chapitre.

VI - PURETE SPECTRALE

VI.1 - Définition

Pour de nombreuses applications, il est intéressant de connaître la répartition de la puissance radioélectrique du signal $v(t)$ en fonction de la fréquence. On définit ainsi la densité spectrale de puissance $S_v(f)$:

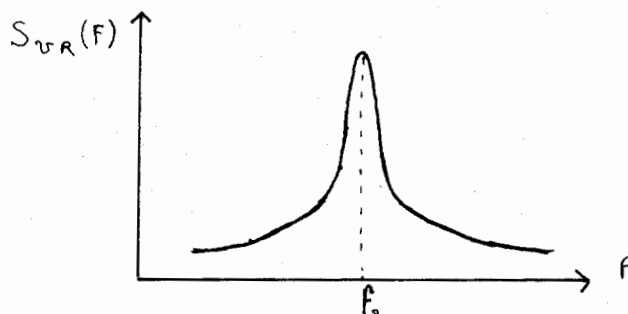
$$(35) \quad S_v(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_v(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad \omega = 2\pi f$$

$S_v(f)$ s'exprime en (W/Hz). [Le signal $v(t)$ étant appliqué aux bornes d'une résistance idéale de 1 ohm]

Le spectre d'un signal sinusoïdal idéal : $v_i(t) = A_0 \cos(\omega_0 t)$ comporte une fonction de Dirac à la fréquence f_0 :

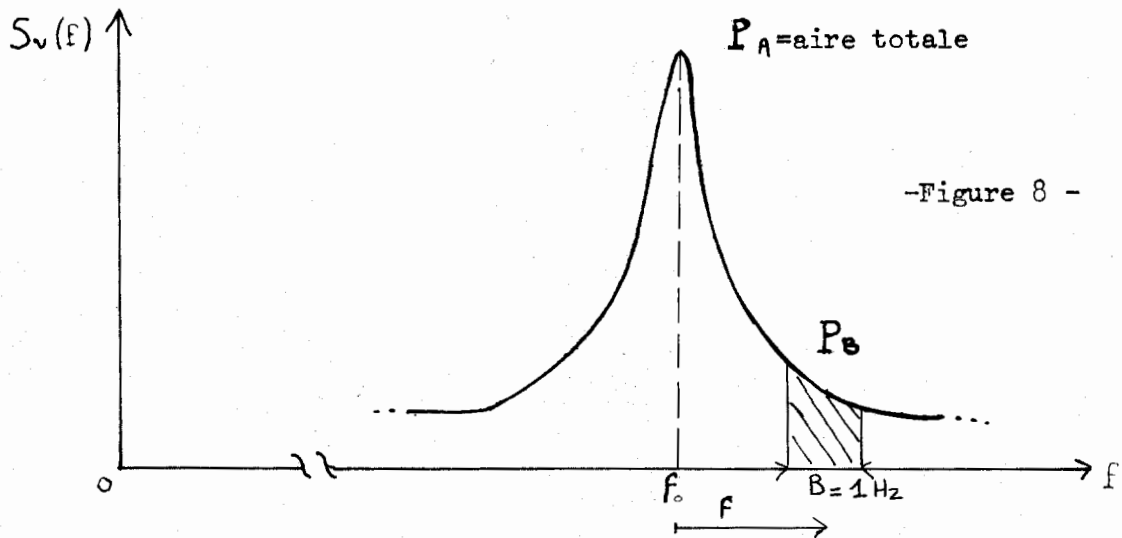
$$(36) \quad S_{v_i}(f) = \frac{A_0^2}{2} \cdot \delta(f - f_0) \quad \omega_0 = 2\pi f_0$$

Les perturbations dues aux fluctuations de fréquence $\phi(t)$ introduisent une largeur de raie et des bandes latérales de bruit :



-Figure 7 -

La pureté spectrale caractérise l'écart entre $S_{v_i}(f)$ et $S_{v_R}(f)$. La connaissance notamment de la largeur de raie et du niveau relatif des bandes de bruit définissent la pureté spectrale. Le paramètre le plus utilisé est le spectre $\mathcal{L}(f)$ défini comme étant la puissance de bruit d'une bande latérale, à une fréquence de Fourier f de la porteuse, dans une bande passante égale à 1 Hz, divisée par la puissance du signal.



-Figure 8 -

$$(37) \quad \mathcal{L}(f) = \frac{P_s}{P_A}$$

Le spectre $\mathcal{L}(f)$ tient compte de toutes les perturbations de la phase : par le bruit, les raies cohérentes (50 Hz), les harmoniques du signal, etc... Il possède un caractère expérimental dans la mesure où il fait intervenir une bande d'analyse B non nulle. Il sera donc directement accessible à l'expérience.

Pour les fluctuations d'amplitude, on définit un spectre équivalent $\mathcal{M}(f)$.

VI.2 - Relation entre pureté spectrale et instabilité dans le domaine fréquence

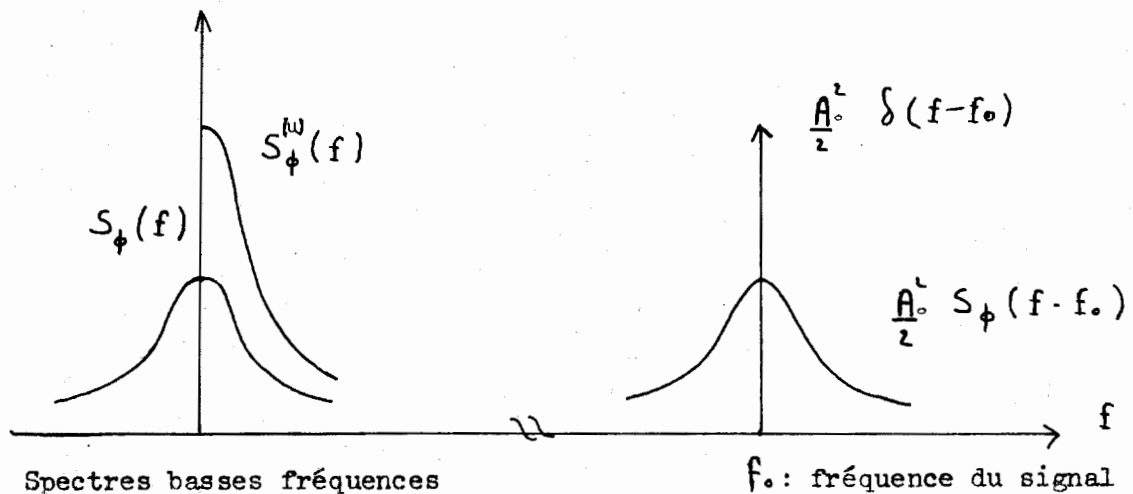
L'instabilité dans le domaine fréquence est surtout caractérisée par la densité spectrale $S_\phi(f)$ (qui est un spectre essentiellement basse fréquence). Nous nous intéresserons donc à la relation entre les spectres $\mathcal{L}(f)$ et $S_\phi(f)$.

En supposant les fluctuations de phase stationnaires et gaussiennes et si celles-ci prédominent sur les fluctuations d'amplitude (ceci est toujours vérifié pour les générateurs ultra-stables), la relation suivante peut être démontrée : (Réf(8))

$$(38) \quad S_v(f) = \frac{A_o^2}{2} e^{-\sigma_\phi^2} \left\{ \delta(f-f_o) + S_\phi(f-f_o) + \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n!} (S_\phi(f) \otimes^{n-1} S_\phi(f)) \right\}_{f_o}$$

Dans le cas du faible indice de modulation, $\overline{\phi^2(t)} \ll 1 \text{ rd}^2$, cette relation se simplifie :

$$(39) \quad S_v(f) = \frac{A_o^2}{2} \left\{ \delta(f-f_o) + S_\phi(f-f_o) \right\}$$



- Figure 9 -

Nous avons donc en première approximation :

$$(40) \quad \mathcal{L}(f) = \frac{1}{2} S_\phi^{(u)}(f)$$

En considérant les fluctuations d'amplitude $a(t)$, la relation (38) devient :

$$S_v(f) = \frac{A_o^2}{2} e^{-\sigma_\phi^2} \left\{ \delta(f-f_o) + S_\phi(f-f_o) + S_a(f-f_o) + (S_a(f) \otimes S_\phi(f))_{f_o} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} (S_\phi(f) \otimes^{n-1} S_\phi(f))_{f_o} \right\}$$

Pour des faibles indices de modulation :

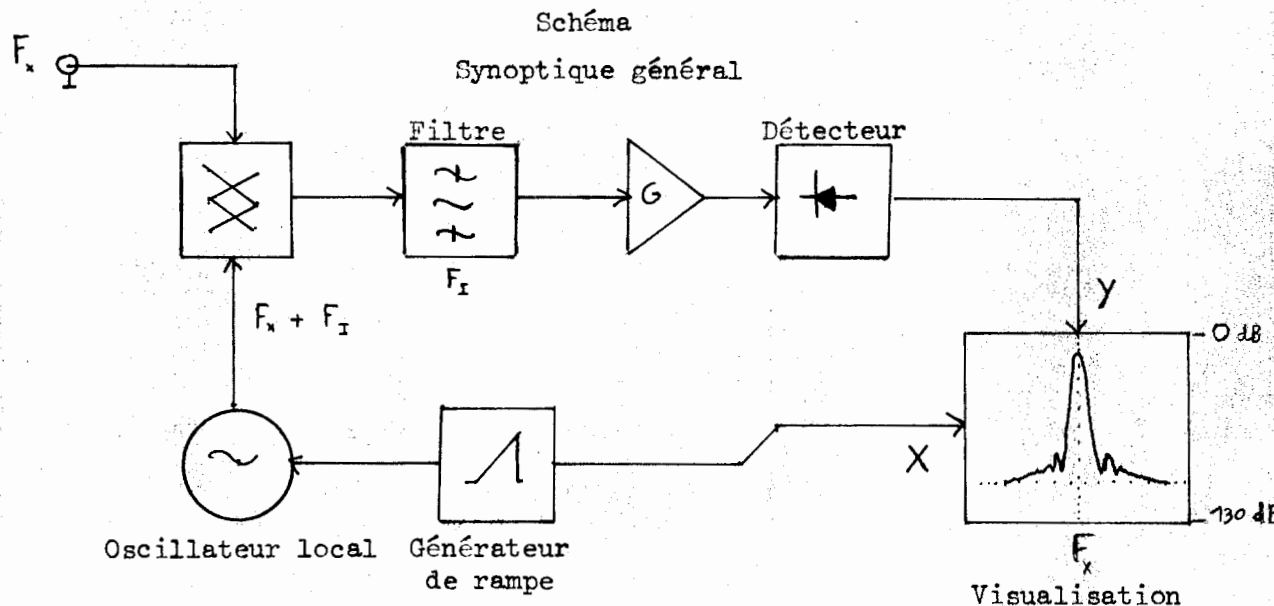
$$S_v(f) = \frac{A_o^2}{2} e^{-\sigma_\phi^2} \left\{ \delta(f-f_o) + S_\phi(f-f_o) + S_a(f-f_o) \right\}$$

Nous avons donc en première approximation :

$$m(f) = \frac{1}{2} S_a^{(u)}(f) = \frac{1}{2} \frac{S_a(f)}{A_o^2}$$

VI.3 - Analyseurs de spectre

Les analyseurs de spectre RF permettent la mesure directe de la pureté spectrale des générateurs de fréquence, et fournissent une visualisation complète du spectre $S_V(f)$:



- Figure 10 -

Le bruit propre de l'analyseur impose généralement une dynamique insuffisante pour la mesure des générateurs ultra-stables (très peu d'analyseurs dépassent 80-90 dB). Une autre limitation importante de la grande majorité des analyseurs concerne l'analyse près de la fréquence porteuse : or, pour certaines analyses théoriques, il est nécessaire de connaître $\mathcal{L}(f)$ pour quelques hertz. Il faut aussi remarquer que dans ce processus de mesure, le bruit d'amplitude intervient dans les bandes latérales comme le bruit de fréquence. En conclusion, nous pouvons dire que les performances des analyseurs de spectre sont insuffisantes pour la mesure directe des meilleurs générateurs ultra-stables (oscillateurs à quartz de très haute qualité par exemple).

Un analyseur synthétisé disponible commercialement permet toutefois la mesure des sources de bonne qualité telles que synthétiseurs et certains oscillateurs à quartz.

VII - ESTIMATION DES MESURES

VII.1 - Erreur systématique et erreur aléatoire

La détermination expérimentale d'un paramètre statistique ψ ne peut conduire qu'à une estimation $\hat{\psi}$ de ce paramètre. La précision de cette estimation est caractérisée par la moyenne quadratique de l'erreur $\hat{\psi} - \psi$: (Réf (14)).

$$(41) \quad E[(\hat{\psi} - \psi)^2]$$

En développant, on obtient l'expression :

$$(42) \quad E[(\hat{\psi} - \psi)^2] = E[(\hat{\psi} - E[\hat{\psi}])^2] + E[(\psi - E[\hat{\psi}])^2]$$

qui permet de faire la distinction entre :

$$(43) \quad \begin{aligned} & - \text{l'erreur aléatoire :} & \sigma^2[\hat{\psi}] &= E[(\hat{\psi} - E[\hat{\psi}])^2] \\ & - \text{et l'erreur systématique :} & b^2[\hat{\psi}] &= (\psi - E[\hat{\psi}])^2 \quad (\text{biais}). \end{aligned}$$

VII.2 - Exemple de biais

VII.2.1 - Biais introduit par la largeur de bande d'un filtre d'analyse.

Le paramètre $\hat{S}_\phi(f, B)$ n'étant qu'une approximation de $S_\phi(f)$, il est intéressant de savoir quelle est l'erreur commise en fonction de la bande passante B.

a - Cas du filtre rectangle

L'erreur systématique, ou biais, de la mesure sera notée :

$$b[\hat{S}_\phi(f, B)] = E[\hat{S}_\phi(f, B, T)] - S_\phi(f)$$

Considérons une mesure particulière à la fréquence f_0 , nous pouvons décomposer $S_\phi(f)$ en série de Taylor :

$$b[\hat{S}_\phi(f_0, B)] = \frac{1}{B} \int_{f_0 - \frac{B}{2}}^{f_0 + \frac{B}{2}} S_\phi(f) df - S_\phi(f_0)$$

$$(44) \quad b[\hat{S}_\phi(f_0, B)] = \frac{1}{B} \int_{f_0 - \frac{B}{2}}^{f_0 + \frac{B}{2}} [S_\phi(f_0) + h S'_\phi(f_0) + \frac{h^2}{2} S''_\phi(f_0) \dots] dh - S_\phi(f_0)$$

avec $h = f - f_0$

$$(45) \quad b[\hat{S}_\phi(f_0, B)] = \frac{1}{B} \int_{-\frac{B}{2}}^{+\frac{B}{2}} [S_\phi(f_0) + \dots + \frac{h^n}{n!} S^{(n)}_\phi(f_0)] dh - S_\phi(f_0)$$

$$b[\hat{S}_\phi(f_0, B)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B^{2n}}{2^{2n} (2n+1)!} S^{(2n)}_\phi(f_0)$$

Le modèle de spectre utilisé étant $S_\phi(f) = kf^\alpha$

$$S^{(2n)}_\phi(f_0) = K \alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-2n+1) f_0^{\alpha-2n}$$

$$(46) \quad b[\hat{S}_\phi(f_0, B)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B^{2n} \alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-2n+1) K f_0^{\alpha-2n}}{2^{2n} (2n+1)!}$$

avec $B = \frac{f_0}{Q}$

$$(47) \quad b[\hat{S}_\phi(f_0, B)] = S_\phi(f_0) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-2n+1)}{(2Q)^{2n} (2n+1)!}$$

En première approximation :

$$(48) \quad \frac{b[S_{\phi}(f_0, B)]}{S_{\phi}(f_0)} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{24 Q^2}$$

$S_{\phi}(f)$	k_0	k_1/f	k_2/f^2	k_3/f^3	k_4/f^4
1ère approximation $\frac{b[\hat{S}_{\phi}]}{S_{\phi}}$	0	$\frac{1}{12Q^2}$	$\frac{1}{4Q^2}$	$\frac{1}{2Q^2}$	$\frac{1}{1,2Q^2}$

Tableau [VIII]

b - Cas du filtre butterworth du 3ème ordre

$$\hat{S}_{\phi}(f_0, B) = \frac{Q}{f_0} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\phi}(f) \cdot \frac{1}{1 + Q^6 \left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right)^6} df$$

$$b[\hat{S}_{\phi}(f_0, B)] = \frac{Q}{f_0} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\phi}(f) \cdot \frac{1}{1 + Q^6 \left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right)^6} df - S_{\phi}(f_0)$$

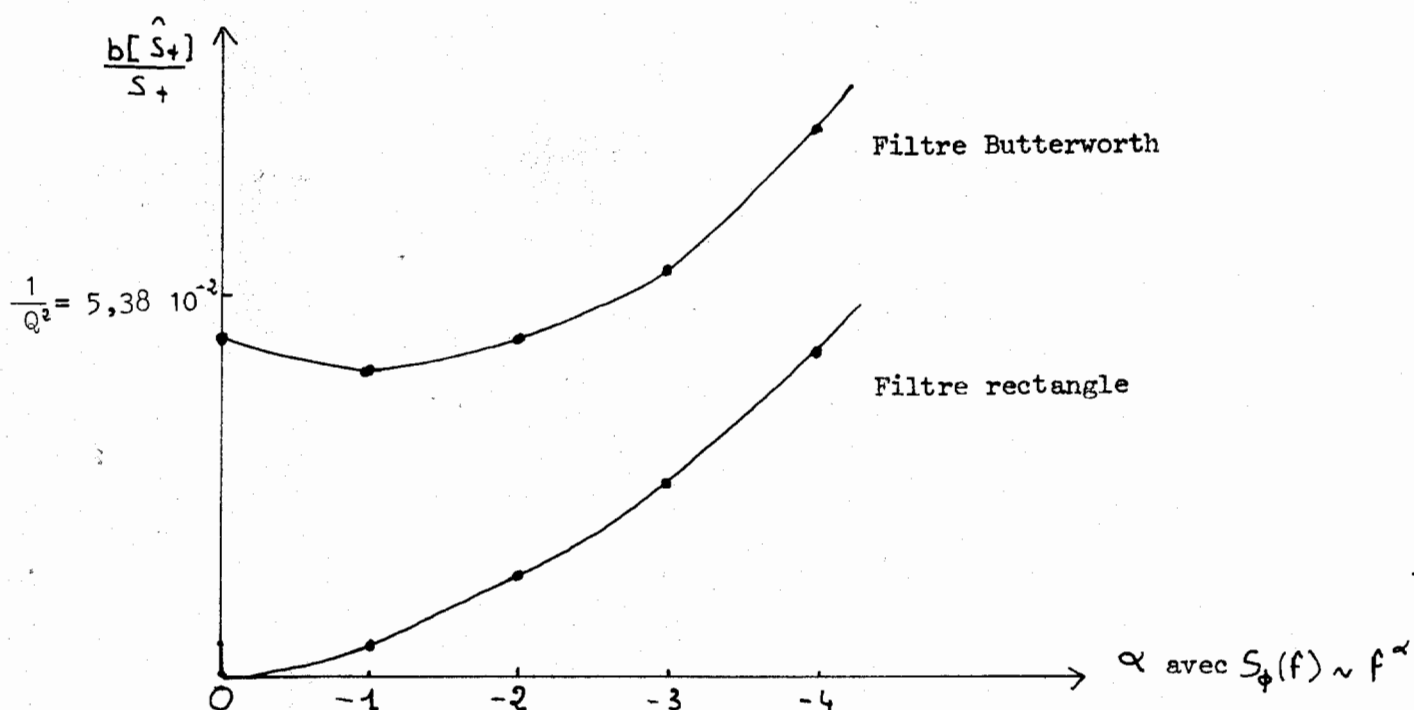
en posant : $x = \frac{f}{f_0}$ et $S_{\phi}(f) = k f^{\alpha}$

$$(49) \quad \frac{b[\hat{S}_{\phi}(f_0, B)]}{S_{\phi}(f_0)} = Q \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{\alpha} dx}{1 + Q^6 \left(x - \frac{1}{x} \right)^6} - 1$$

Le calcul ayant été effectué à l'ordinateur, on obtient le tableau suivant :
avec $Q = 4,31$.

$S_{\phi}(f)$	k_0	k_1/f	k_2/f^2	k_3/f^3	k_4/f^4
$\frac{b[\hat{S}_+]}{S_{\phi}}$	0,047	0,043	0,047	0,057	0,075
S_{ϕ}	*				

Tableau [IX]



- Figure 11 -

* La bande passante définie comme la largeur du filtre à - 3 dB introduit un biais pour $S_{\phi}(f)=k_0$, la définition exacte de B est donnée par la relation suivante:

$$B = \frac{\int_0^{+\infty} |H(f)|^2 df}{|H(f_0)|^2}$$

f_0 : fréquence centrale du filtre.

En utilisant cette définition de B nous aurions $\frac{b[\hat{S}_+]}{S_{\phi}}=0$ pour $S_{\phi}(f)=k_0$.

VII.2.2 - Biais introduit par la variance d'échantillon $\sigma^2(N, \tau)$

Considérons la variance d'échantillon définie par :

$$(50) \quad \sigma_{\dot{\phi}}^2(N, \tau) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\langle \dot{\phi}(t) \rangle_i - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \langle \dot{\phi}(t) \rangle_j \right)^2$$

L'espérance mathématique de cette expression est donnée par :

$$E[\sigma_{\dot{\phi}}^2(N, \tau)] = \frac{1}{N} E \left\{ \sum_{i=1}^N \left(\langle \dot{\phi}(t) \rangle_i - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \langle \dot{\phi}(t) \rangle_j \right)^2 \right\}$$

$$E[\sigma_{\dot{\phi}}^2(N, \tau)] = \frac{1}{N} E \left\{ \sum_{i=1}^N \left(\langle \dot{\phi}(t) \rangle_i - \overline{\langle \dot{\phi}(t) \rangle} + \overline{\langle \dot{\phi}(t) \rangle} - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \langle \dot{\phi}(t) \rangle_j \right)^2 \right\}$$

Dans le cas de mesures non-corrélées, cette relation peut se mettre sous la forme

$$E[\sigma_{\dot{\phi}}^2(N, \tau)] = \frac{1}{N} E \left\{ \sum_{i=1}^N \left(\langle \dot{\phi}(t) \rangle_i - \overline{\langle \dot{\phi}(t) \rangle} \right)^2 - N \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \langle \dot{\phi}(t) \rangle_j - \overline{\langle \dot{\phi}(t) \rangle} \right)^2 \right\}$$

$$E[\sigma_{\dot{\phi}}^2(N, \tau)] = \sigma_{\dot{\phi}}^2(\infty, \tau) - \frac{\sigma_{\dot{\phi}}^2(\infty, \tau)}{N}$$

La définition précédente de la variance vraie introduit une erreur systématique :

$$b^2[\sigma_{\dot{\phi}}^2(N, \tau)] = \left\{ \sigma_{\dot{\phi}}^2(\infty, \tau) - \sigma_{\dot{\phi}}^2(\infty, \tau) \left[1 - \frac{1}{N} \right] \right\}^2$$

En développant cette relation, on obtient :

$$(51) \quad \frac{b[\sigma_{\dot{\phi}}^2(N, \tau)]}{\sigma_{\dot{\phi}}^2(\infty, \tau)} = \frac{1}{N}$$

Nous sommes donc conduits à définir une nouvelle variance sans biais :

$$(52) \quad \sigma_{\dot{\phi}}^2(N, \tau) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \left(\langle \dot{\phi}(t) \rangle_{\varepsilon, i} - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \langle \dot{\phi}(t) \rangle_{\varepsilon, j} \right)^2$$

VII.3 - Erreur aléatoire - estimation de la moyenne

Soit un processus aléatoire $X(t)$ de moyenne nulle $\overline{X(t)} = 0$. La moyenne effectuée sur une durée T :

$$\langle X(t) \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt$$

est une estimation de $\overline{X(t)}$.

L'erreur aléatoire introduite par la durée finie de l'intégration est définie par

$$\sigma^2 [\langle X(t) \rangle_T]$$

Ce paramètre a été étudié dans les paragraphes précédents pour $X(t) = \phi(t)$. Nous rappellerons la relation fondamentale :

$$(53) \quad \sigma^2 [\langle X(t) \rangle_T] = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) \cdot \left(\frac{\sin \pi T f}{\pi T f} \right)^2 df$$

Cette relation peut se mettre sous la forme :

$$(54) \quad \sigma^2 [\langle X(t) \rangle_T] = \frac{1}{T} \int_{-T}^{+T} R_x(\tau) \left[1 - \frac{|\tau|}{T} \right] d\tau$$

Exemple : Dans le cas où : $S_x(f) = kf^2$, l'expression correspondante du tableau IV donne :

$$\sigma^2 [\langle X(t) \rangle_T] = \frac{1}{2} \frac{K f_H}{\pi^2 T^2}$$

l'erreur quadratique normalisée vaut donc :

$$\frac{\sigma^2 [\langle X(t) \rangle_T]}{\sigma_x^2} = \frac{3}{2 \pi^2 (T f_H)^2}$$

VII.4 - Erreur aléatoire - estimation du carré

On considère le même processus $X(t)$, on désire calculer la valeur moyenne de son carré :

$$\langle X^2(t) \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T X^2(t) dt$$

L'erreur aléatoire est caractérisée par :

$$\sigma^2 [\langle X^2(t) \rangle_T]$$

on pose $Y(t) = X^2(t) - \overline{X^2(t)}$. $Y(t)$ est un processus aléatoire de moyenne nulle, nous savons que ;

$$\sigma^2 [\langle Y(t) \rangle_T] = \int_{-\infty}^{+\infty} S_Y(f) \left(\frac{\sin \pi T f}{\pi T f} \right)^2 df$$

La fonction d'autocorrélation de $Y(t)$ étant donnée par :

$$R_Y(\tau) = 2 R_X^2(\tau)$$

on en déduit la densité spectrale de $Y(t)$:

$$S_Y(f) = 2 [S_X(f) \otimes S_X(f)]$$

On obtient en reportant $S_Y(f)$ dans la relation précédente :

$$(55) \quad \sigma^2 [\langle X^2(t) \rangle_T] = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} [S_X(f) \otimes S_X(f)] \left(\frac{\sin \pi T f}{\pi T f} \right)^2 df$$

Cette relation peut se mettre sous la forme :

$$(56) \quad \sigma^2 [\langle X^2(t) \rangle_T] = \frac{2}{T} \int_{-T}^{+T} R_X^2(\tau) \left(1 - \frac{|\tau|}{T} \right) d\tau$$

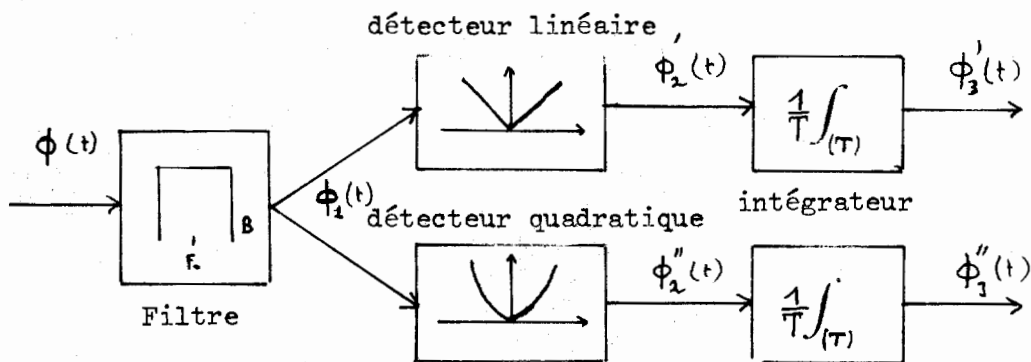
VII.5 - Etude comparative des détecteurs linéaires et quadratiques

Considérons un signal aléatoire $\phi(t)$ dont on veut estimer la puissance dans une bande de fréquence donnée B , la valeur théorique cherchée étant :

$$\sigma_{\phi_1}^2 = \int_B S_{\phi}^{(u)}(f) df = S_{\phi}^{(u)}(f_0) \cdot B = 2 S_{\phi}(f_0) B$$

(On considère $S_{\phi}(f)$ constant dans la bande passante B).

L'utilisation des deux types de détection est alors possible :



- Figure 12 -

VII.5.1 - Cas de détection linéaire

A la sortie du redressement linéaire, on obtient :

$$\phi_2'(t) = |\phi_1(t)|$$

Si l'on suppose que le processus $\phi_1(t)$ est gaussien, l'intégrateur délivre une tension proportionnelle à σ_{ϕ_1} :

$$(57) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \phi_2'(t) dt = \overline{\phi_2'(t)} = \overline{|\phi_1(t)|} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma_{\phi_1}$$

On montre que la densité spectrale de $\phi_2'(t)$ est donnée par : (Réf (15))

$$(58) \quad S_{\phi_2}(f) = \underbrace{\frac{2}{\pi} \sigma_{\phi_1}^2 \delta(f)}_{\text{composante continue}} + \underbrace{S_{\phi_1}(f)}_{\text{composante aléatoire}} + \frac{1}{\pi \sigma_{\phi_1}^2} [S_{\phi_1}(f) \otimes S_{\phi_1}(f)]$$

En reportant dans la relation (53) la partie basse fréquence de la composante aléatoire, on obtient la variance de l'erreur aléatoire

$$(59) \quad \sigma_\ell^2 [\langle \phi_3'(t) \rangle_T] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi \sigma_{\phi_1}^2} [S_{\phi_1}(f) \otimes S_{\phi_1}(f)] \cdot \left(\frac{\sin \pi T f}{\pi T f} \right)^2 df$$

VII.5.2 - Cas du détecteur quadratique

La densité spectrale du processus $\phi_2''(t)$ est donnée par :

$$(60) \quad S_{\phi_2''}(f) = \sigma_{\phi_1}^4 \delta(f) + 2 [S_{\phi_1}(f) \otimes S_{\phi_1}(f)]$$

l'intégrateur délivre une tension proportionnelle à $\sigma_{\phi_1}^2$. En reportant la partie aléatoire de $S_{\phi_1}(f)$ dans la relation (53), on obtient la variance de l'erreur aléatoire :

$$(61) \quad \sigma_Q^2 [\langle \phi_3''(t) \rangle_T] = \int_{-\infty}^{+\infty} 2 [S_{\phi_1}(f) \otimes S_{\phi_1}(f)] \cdot \left(\frac{\sin \pi T f}{\pi T f} \right)^2 df$$

VII.5.3 - Comparaison des deux méthodes

Pour comparer ces deux résultats, nous posons :

$$(62) \quad I^2(T, B) = \int_{-\infty}^{+\infty} [S_{\phi_1}(f) \otimes S_{\phi_1}(f)] \cdot \left(\frac{\sin \pi T f}{\pi T f} \right)^2 df$$

on obtient ainsi :

$$(63) \quad \begin{cases} \sigma_\ell^2 [\langle \phi_3'(t) \rangle_T] = \frac{I^2(T, B)}{\pi \sigma_{\phi_1}^2} \\ \sigma_Q^2 [\langle \phi_3''(t) \rangle_T] = 2 I^2(T, B) \end{cases}$$

Nous ne pouvons pas comparer directement ces deux résultats, il faut considérer deux mesures particulières, l'une permettant de calculer $\hat{\sigma}_\ell$, l'autre $\hat{\sigma}_Q$.

Nous pouvons écrire :

$$\text{Prob} \left\{ \left| \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\hat{\sigma}_{\phi_1})_\ell - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma_{\phi_1} \right| \leq k \frac{I(T, B)}{\sqrt{\pi} \sigma_{\phi_1}} \right\} \approx 1 - \frac{1}{k^2}$$

$$\text{Prob} \left\{ \left| (\hat{\sigma}_{\phi_1}^2)_Q - \sigma_{\phi_1}^2 \right| \leq k \sqrt{2} I(T, B) \right\} \approx 1 - \frac{1}{k^2}$$

$$(k > 1)$$

On peut déduire de ces relations deux intervalles d'erreur :

$$(64) \quad \begin{cases} (\sigma_{\phi_1})_\ell = \sigma_{\phi_1} \left(1 \pm \frac{I(T, B)}{\sqrt{2} \sigma_{\phi_1}^2} \right) \\ (\sigma_{\phi_1}^2)_Q = \sigma_{\phi_1}^2 \left(1 \pm \frac{\sqrt{2} I(T, B)}{\sigma_{\phi_1}^2} \right) \end{cases}$$

$$(65) \quad \sqrt{(\sigma_{\phi_1}^2)_Q} = \sigma_{\phi_1} \left(1 \pm \frac{\sqrt{2} I(T, B)}{\sigma_{\phi_1}^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \sigma_{\phi_1} \left(1 \pm \frac{\sqrt{2} I(T, B)}{2 \sigma_{\phi_1}^2} \pm \frac{I^2(T, B)}{\sigma_{\phi_1}^4} \right)$$

Le rapport $\frac{I(T, B)}{\sigma_{\phi_1}^2}$ étant très petit devant l'unité, on néglige les termes d'ordre supérieur à 1 :

$$(66) \quad (\sigma_{\phi_1})_Q = \sigma_{\phi_1} \left(1 \pm \frac{I(T, B)}{\sqrt{2} \sigma_{\phi_1}^2} \right) = (\sigma_{\phi_1})_\ell$$

La détection linéaire et la détection quadratique conduisent au même intervalle d'erreur. On peut donc conclure que les deux détecteurs sont aussi performantes du point de vue de la précision statistique dans le cas d'un processus gaussien. En pratique, les fluctuations analysées sont généralement gaussiennes ; or, il est plus facile expérimentalement de réaliser un détecteur linéaire.

VII.5.4 - Détermination de $S_\phi(f)$

Pour la détermination de la valeur $S_\phi(f)$, nous disposons de l'estimateur $\hat{\sigma}_{\phi_1}$ qui permet d'écrire :

$$\hat{S}_{\phi_1}^{(u)}(f, T, B) = \frac{\hat{\sigma}_{\phi_1}^2}{B}$$

L'estimateur $\hat{S}_\phi$ va introduire une erreur aléatoire et une erreur systématique.

a - détermination de l'erreur aléatoire

La relation (66) donne la variance normalisée de l'erreur aléatoire :

$$(67) \quad \frac{\sigma [\hat{S}_\phi(f_0, T, B)]}{S_\phi(f_0)} = 2 \cdot \frac{I(T, B)}{\sqrt{2} \sigma_{\phi_1}^2}$$

avec :

$$\begin{cases} I^2(T, B) = \int_{-\infty}^{+\infty} [S_{\phi_1}(f) \otimes S_{\phi_1}(f)] \cdot \left(\frac{\sin \pi T f}{\pi T f} \right)^2 df \\ \sigma_{\phi_1}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\phi_1}(f) df = \int_{f_0 - \frac{B}{2}}^{f_0 + \frac{B}{2}} S_{\phi_1}^{(u)}(f) df \end{cases}$$

Les hypothèses suivantes vont nous permettre de simplifier ces relations :

- $S_\phi(f)$ est constant dans la bande de fréquence analysée ;
- le temps de mesure T est très grand.

On obtient ainsi :

$$\begin{cases} \sigma_{\phi_1}^2 = 2 S_\phi(f_0) \cdot B = S_{\phi_1}^{(u)}(f_0) \cdot B \\ I^2(T, B) = 2 S_\phi^2(f_0) \cdot B \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin \pi T f}{\pi T f} \right)^2 df = 2 S_\phi^2(f_0) \frac{B}{T} \end{cases}$$

$$(68) \quad \frac{\sigma [\hat{S}_\phi(f_0, T, B)]}{S_\phi(f_0)} = \sqrt{\frac{1}{TB}}$$

b - détermination de l'erreur systématique

On a montré que le biais introduit par la largeur du filtre était :

$$\frac{b [\hat{S}_\phi(f_0, B)]}{S_\phi(f_0)} = \frac{\alpha(\alpha - 1)}{24 Q^2}$$

c - erreur introduite par l'estimateur $\hat{S}_\phi(f, T, B)$

Si nous notons ξ l'écart type de l'erreur introduite par l'estimateur $\hat{S}_\phi(f, T, B)$, nous avons montré que :

$$\xi = \sqrt{\frac{\sigma^2 [\hat{S}_\phi(f, T, B)]}{S_\phi^2(f_0)} + \frac{b^2 [\hat{S}_\phi(f, T, B)]}{S_\phi^2(f_0)}}$$

En remplaçant les erreurs aléatoires et systématiques par leurs valeurs, on obtient :

$$(69) \quad \xi = \left[\frac{1}{T \cdot B} + \left[\frac{\alpha(\alpha-1)}{24 Q^2} \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Exemple :

- Pour le bruit flicker de fréquence ($S_\phi(f) = \frac{k_1}{f}$ soit $S_\phi(f) = \frac{k_2}{f^3}$) nous avons $\alpha = -3$.

- Sachant que : $Q = \frac{f_0}{B}$, nous pouvons exprimer l'erreur ξ en fonction de T (temps de mesure) et B (bande passante du filtre d'analyse).

$$(70) \quad \xi = \left[\frac{1}{T \cdot B} + \left[\frac{B^2}{2 F_0^2} \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Il faut noter le rôle opposé que joue la bande passante du filtre; sa décroissance entraîne une augmentation de l'erreur aléatoire et une diminution de l'erreur systématique.

Expérimentalement, il faut trouver un compromis afin d'avoir une analyse suffisamment fine sans utiliser des temps de mesure excessivement longs. De même, si le filtre d'analyse a une bande passante B fixe, il est inutile d'utiliser des temps de mesure donnant une erreur aléatoire négligeable devant l'erreur systématique.

C H A P I T R E I I

ESTIMATION DE L'INSTABILITE DANS LE DOMAINE FREQUENCE

PAR DES MESURES TEMPORELLES (VARIANCE DE HADAMARD)

	pages
I - Position du problème.	54
II - La variance de Hadamard.	56
II.1 - Définition.	56
II.2 - Etude analytique.	57
II.3 - Influence de la méthode de mesure sur le spectre à étudier.	76
II.4 - Conclusion	85

I - POSITION DU PROBLEME

I.1 - Introduction.

Le comptage de fréquence à l'aide d'un fréquencesmètre numérique permet d'estimer l'instabilité dans le domaine temps. Une interprétation dans le domaine fréquence de ces mesures est parfois possible en considérant des paramètres comme la variance vraie ou la variance d'Allan : nous avons rappelé la dépendance de $\sigma_{\dot{\phi}}^2(2, \tau)$ en fonction de la densité spectrale $S_{\dot{\phi}}(f)$. Ces paramètres ne sont toutefois pas des estimateurs convenables pour la mesure des densités spectrales : la variance d'Allan, par exemple, ne différencie pas les bruits blanc et flicker de phase ; $\sigma_{\dot{\phi}}^2(2, \tau)$ dépend de la bande passante du banc de mesure et celle-ci reste souvent indéterminée. Il est donc souhaitable de définir un nouveau processus de mesures (temporelles) permettant une estimation précise de la densité spectrale $S_{\dot{\phi}}(f)$; c'est ainsi que R. Baugh a introduit la variance de Hadamard. Réf (16).

I.2 - Structure de la fonction de transfert d'Allan.

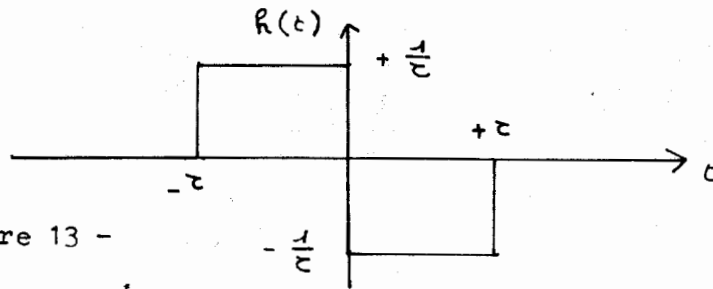
C'est en étudiant les propriétés de la variance d'Allan que R. Baugh a conçu la structure du processus de mesure de la variance de Hadamard. Deux relations permettent d'établir les propriétés statistiques de $\sigma_{\dot{\phi}}^2(2, \tau)$:

$$(71) \quad \sigma_{\dot{\phi}}^2(2, \tau) \begin{cases} \rightarrow \text{domaine temps} & \sigma_{\dot{\phi}}^2(2, \tau) = \frac{1}{2} \langle (\langle \dot{\phi} \rangle_{t_i} - \langle \dot{\phi} \rangle_{t_i + \tau})^2 \rangle \\ \rightarrow \text{domaine fréquence} & \sigma_{\dot{\phi}}^2(2, \tau) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\dot{\phi}}(f) \left(\frac{\sin^2 \pi \tau f}{\pi \tau f} \right)^2 df \end{cases}$$

Le développement de la relation [71] permet d'expliciter l'influence du processus de mesure dans la relation entre domaine temps et domaine fréquence : (Réf (16))

$$(72) \quad \begin{aligned} \sigma_{\dot{\phi}}^2(2, \tau) &= \frac{1}{2} \left\langle \left(\frac{1}{\tau} \int_{t_i}^{t_i + \tau} \dot{\phi}(t) dt - \frac{1}{\tau} \int_{t_i + \tau}^{t_i + 2\tau} \dot{\phi}(t) dt \right)^2 \right\rangle \\ \sigma_{\dot{\phi}}^2(2, \tau) &= \frac{1}{2} \left\langle \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \dot{\phi}(\theta) R(t_i - \theta) d\theta \right)^2 \right\rangle \\ \sigma_{\dot{\phi}}^2(2, \tau) &= \frac{1}{2} \left\langle \left(\dot{\phi}(t) \otimes R(t) \right)^2 \right\rangle \end{aligned}$$

La variance d'Allan est ainsi définie à partir du produit de convolution des fluctuations de fréquence avec une fonction $h(t)$ schématisant le processus de mesure (différence de deux mesures adjacentes de durée τ).



- Figure 13 -

$h(t)$ peut être considérée comme la réponse impulsionnelle d'un filtre linéaire dont la fonction de transfert s'écrit :

$$H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = 2j \cdot \frac{\sin^2(\pi \tau f)}{\pi \tau f}$$

On peut maintenant exprimer facilement la relation [72] en fonction des paramètres relatifs au domaine fréquence :

$$\sigma_{\dot{\phi}}^2(\tau, \tau) = \frac{1}{2} \overline{[\dot{\phi}(t) \otimes h(t)]^2}$$

$$\sigma_{\dot{\phi}}^2(\tau, \tau) = \frac{1}{2} \overline{[g(t)]^2} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} S_g(f) df$$

Le théorème de convolution donne :

$$S_g(f) = S_{\dot{\phi}}(f) \cdot |H(f)|^2$$

soit :

$$\sigma_{\dot{\phi}}^2(\tau, \tau) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\dot{\phi}}(f) \cdot \left(\frac{\sin^2 \pi \tau f}{\pi \tau f} \right)^2 df$$

Ce calcul peut se généraliser pour les différents processus de mesure possibles qui conduisent à une variance :

(73)

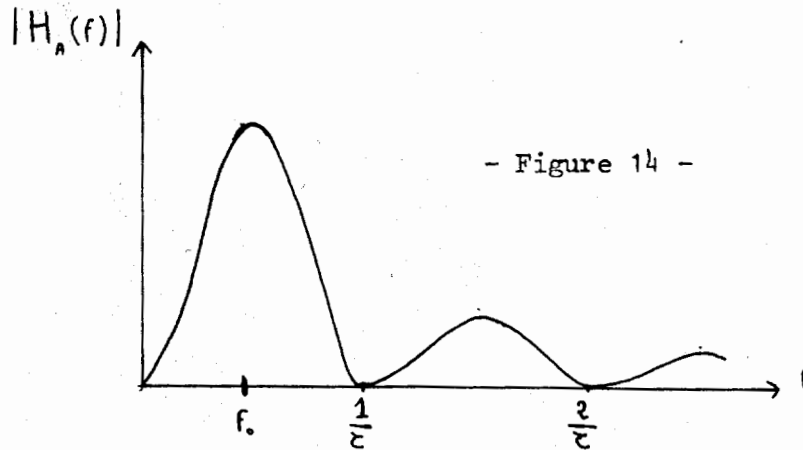
$$\sigma_{\dot{\phi}}^2(N, T, \tau) = \overline{[\dot{\phi}(t) \otimes h(t)]^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\dot{\phi}}(f) \cdot |H(f)|^2 df$$

$\text{Processus de mesure} \longrightarrow \underset{\substack{\updownarrow \\ h(t)}}{h(t)} \xleftrightarrow{\text{Tr. Fourier}} \underset{\substack{\updownarrow \\ H(f)}}{H(f)}$

I.3 - Possibilités d'analyse spectrale avec des mesures temporelles.

La fonction de transfert de la variance d'Allan possède un pic principal centré

sur la fréquence : $f_0 = \frac{0,742}{2\tau}$. Ce pic n'est toutefois pas suffisamment sélectif pour effectuer une analyse spectrale ; c'est pour cette raison qu'il ne discrimine pas les bruits blanc et flicker de phase.



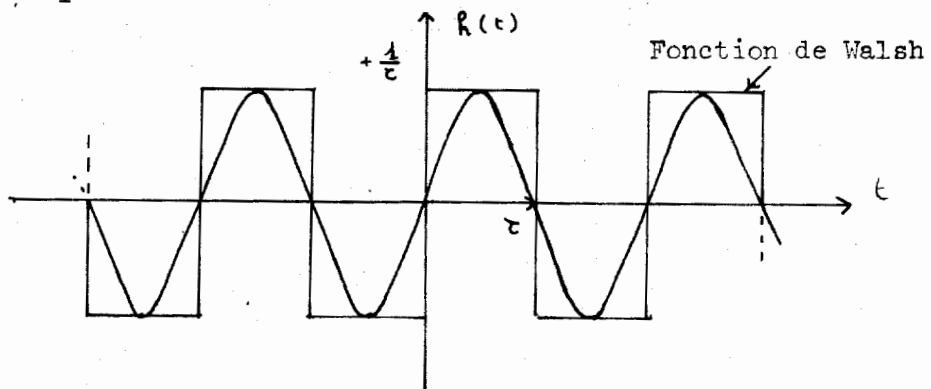
La mesure de la densité spectrale $S_\phi(f)$ à partir de comptages de fréquence est donc possible si le processus de mesure (caractérisé dans le domaine temps par $h(t)$) possède une fonction de transfert $H(f)$ très sélective dans le domaine fréquence.

II - LA VARIANCE DE HADAMARD

II.1 - Définition

La fonction de transfert $H(f)$ idéale pour l'analyse spectrale serait une "fonction de Dirac $\delta(f - f_1)$ qui conduit à un processus de mesure, $h(t)$, irréalisable à l'aide d'un compteur numérique : $h(t) = \sin \omega_1 t$.

La variance de Hadamard utilise comme approximation la fonction de Walsh correspondant à $\sin \omega_1 t$:



- Figure 15 -

Expérimentalement, on effectue 2N mesures de fréquence, chacune de durée τ , puis on retrace et ajoute successivement les résultats des mesures. La variance de Hadamard est le carré-moyen de cette quantité (cas du temps mort nul).

(74)

$$\sigma_H^2(N, \tau, \tau) = 4\pi^2 \langle (\bar{V}_1 - \bar{V}_2 + \bar{V}_3 \dots - \bar{V}_{2N})^2 \rangle$$

où le crochet $\langle \quad \rangle$ représente une moyenne statistique.

Les relations [72, 73] nous permettent de formuler la variance de Hadamard en fonction du processus de mesure :

$$\sigma_H^2(N, \tau, \tau) = \langle (\dot{\phi}(t) \otimes R_H(t))^2 \rangle$$

$$\sigma_H^2(N, \tau, \tau) = \int_0^{+\infty} S_{\dot{\phi}}(f) |H_H(f)|^2 df$$

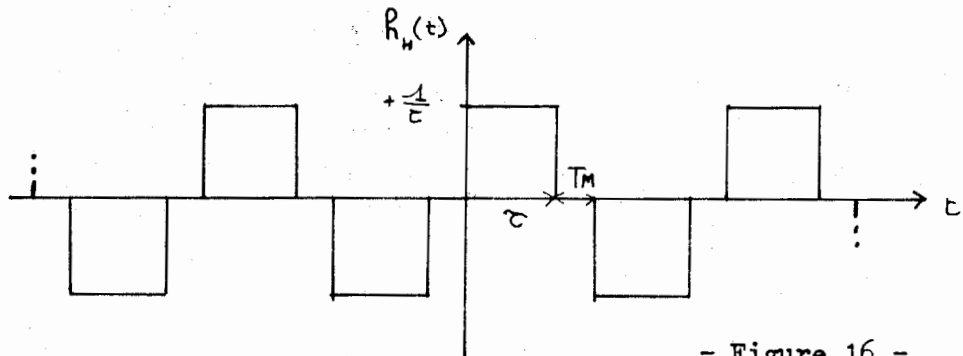
C'est la sélectivité du filtre $|H_H(f)|$ qui va nous permettre d'effectuer une analyse spectrale de $S_{\dot{\phi}}(f)$ à l'aide de la mesure de la variance de Hadamard.

II.2 - Etude analytique.

II.2.1 - Fonction de transfert

a) Calcul de $H_H(f)$.

Nous nous placerons dans le cas général en considérant un temps mort T_M entre les mesures.



- Figure 16 -

La fonction $h_H(t)$ peut être décomposée sous forme d'une somme de 4N fonctions échelons $u(t)$:

$$u(t - \theta) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < \theta \\ 1 & \text{si } t \geq \theta \end{cases}$$

Cette décomposition se formule ainsi :

$$(75) \quad h(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{\tau} \left\{ u(t - 2n(\tau + T_m)) - u(t - 2n(\tau + T_m) - \tau) - u(t - (2n+1)(\tau + T_m)) + u(t - (2n+1)(\tau + T_m) - \tau) \right\}$$

$H_H(f)$ est la transformée de Fourier de $h_H(t)$:

$$H_H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{\tau} [u(t)] e^{-j\omega t} dt$$

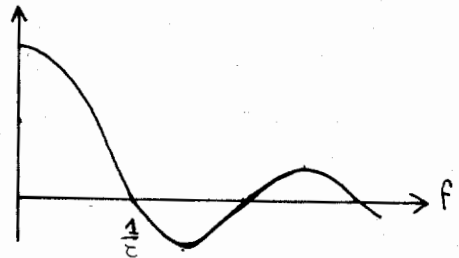
Le développement de ce calcul nous a donné* (voir annexe A) : (Réf (17))

$$(76) \quad |H_H(f)| = \left| \frac{\sin(\pi \tau f)}{\pi \tau f} \cdot \frac{\sin(2\pi N(\tau + T_m) f)}{\cos(2\pi (\tau + T_m) f)} \right|$$

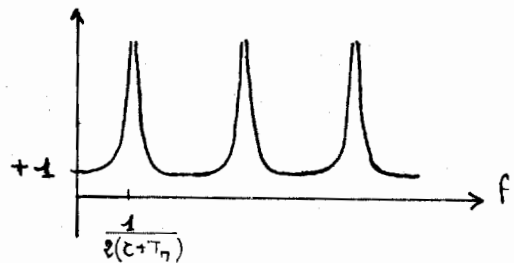
Remarques :

- $H(f)$ est une fonction de τ (temps de mesure), T_m (temps mort), $2N$ (nombre total de mesures).
- $H(f)$ est le produit de trois fonctions simples :

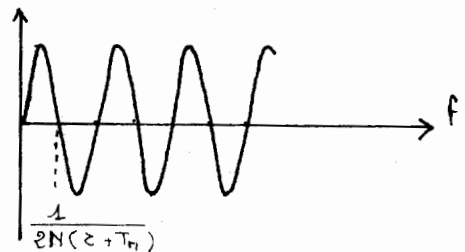
$$\frac{\sin \pi \tau f}{\pi \tau f}$$



$$\frac{1}{\cos \pi (\tau + T_m) f}$$



$$\sin 2\pi N(\tau + T_m) f$$



- Figure 17 -

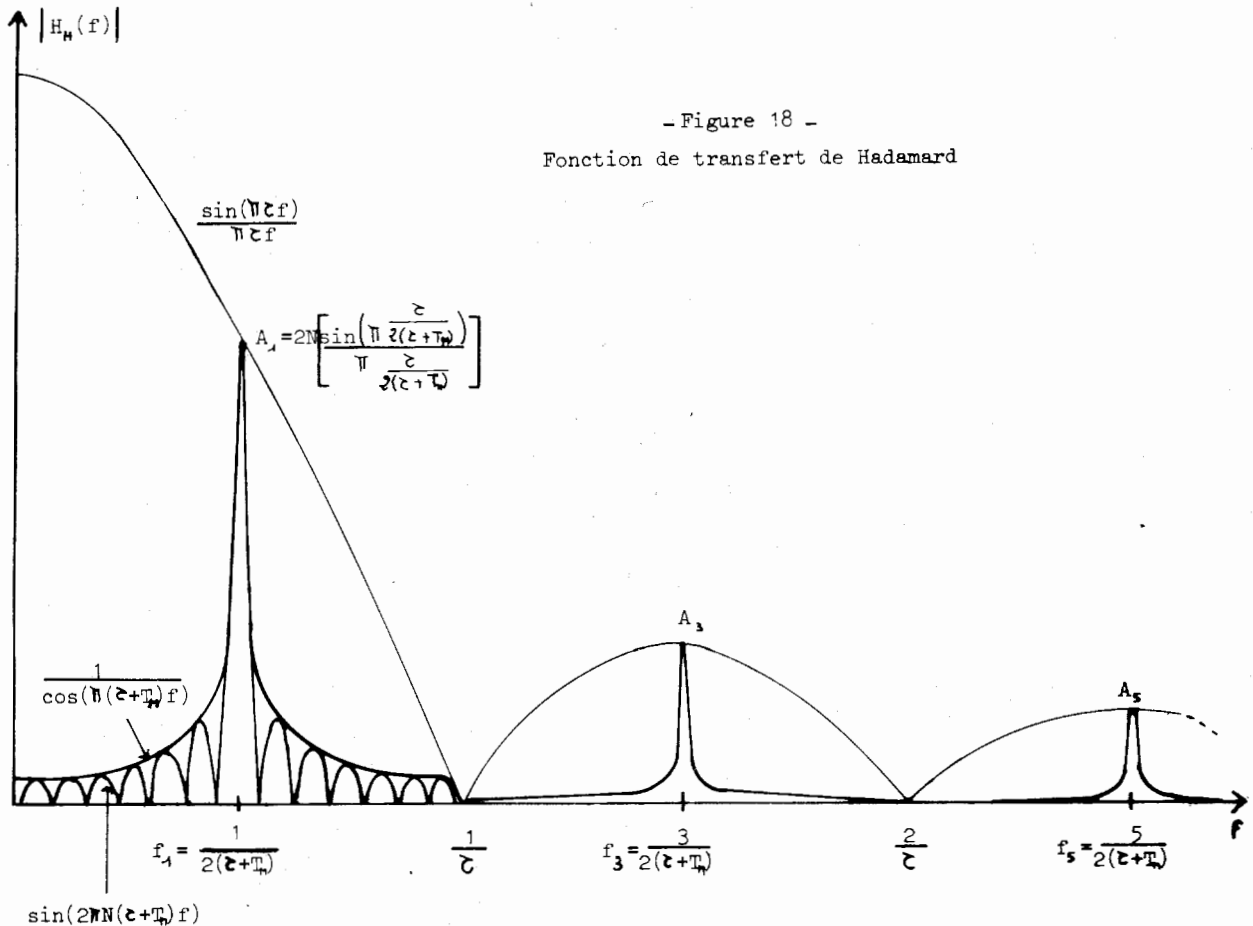
* Cette expression analytique n'avait pas été établie par R. Baugh (16).

Pour une série de fréquences : $f_n = \frac{n}{2(\tau+T_M)}$ (n impair), la fonction de transfert est indéterminée :

$$\frac{\sin(2\pi N(\tau+T) f_n)}{\cos(\pi(\tau+T) f_n)} = \frac{0}{0}$$

Le développement en série de Taylor au voisinage de f_n permet de lever l'indétermination :

$$(77) \quad |H_H(f_n)| = 2N \left| \frac{\sin(\pi \tau f_n)}{\pi \tau f_n} \right|$$



La fonction de transfert comporte un pic principal centré sur : $f_1 = \frac{1}{2(\tau+T_M)}$, mais qui est accompagné de réponses parasites aux fréquences harmoniques impaires f_n .

Les difficultés de cette méthode seront dues à la présence de ces harmoniques impaires.

Remarque :

Les pics d'ordre $n = 3m$ (m impair) sont annulés si $T_M = \frac{1}{2}$

b) Largeur de bande équivalente.

La largeur de bande équivalente Δf d'un filtre $H(f)$, centré sur f_0 est la largeur

d'un filtre rectangle (centré sur f_0), d'aire égale à $\int_0^{\infty} |H(f)|^2 df$ et de hauteur $|H(f_0)|^2$:

$$(78) \quad \Delta f = \frac{\int_0^{\infty} |H(f)|^2 df}{|H(f_0)|^2}$$

Nous pouvons appliquer cette définition à la fonction de transfert de la variance de Hadamard :

$$|H_h(f)|^2 = 4 N^2 \left(\frac{\sin \pi \tau f_i}{\pi \tau f_i} \right)^2$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |H_h(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} |R_h(t)|^2 dt = \frac{2N}{\tau} \quad (\text{théorème de Parseval})$$

La relation [78] nous donne la largeur de bande équivalente de la fonction de transfert de Hadamard :

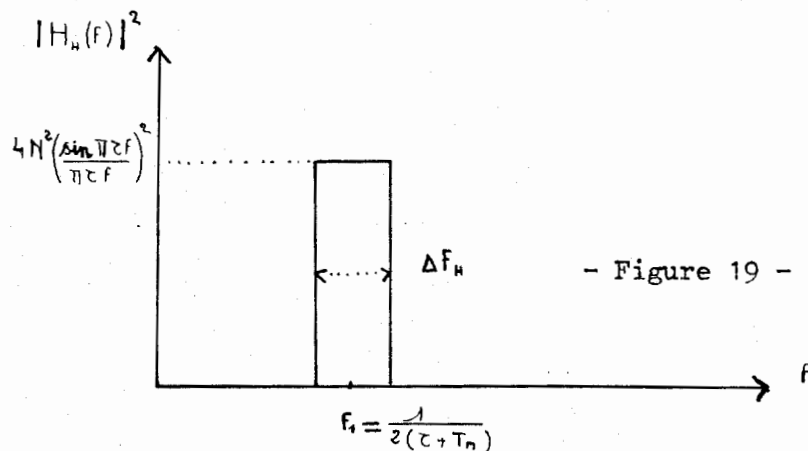
$$(79) \quad \Delta f_h = \frac{1}{4 N \tau} \left(\frac{\pi \tau f_i}{\sin \pi \tau f_i} \right)^2 \quad \text{avec} \quad f_i = \frac{1}{2(\tau + T_n)}$$

Si le temps mort T_M est nul :

$$f_i = \frac{1}{2\tau} \quad \Delta f_h = \frac{\pi^2}{8} \cdot \frac{f_i}{N} \quad \frac{\Delta f_h}{f_i} = \frac{\pi^2}{8} \cdot \frac{1}{N}$$

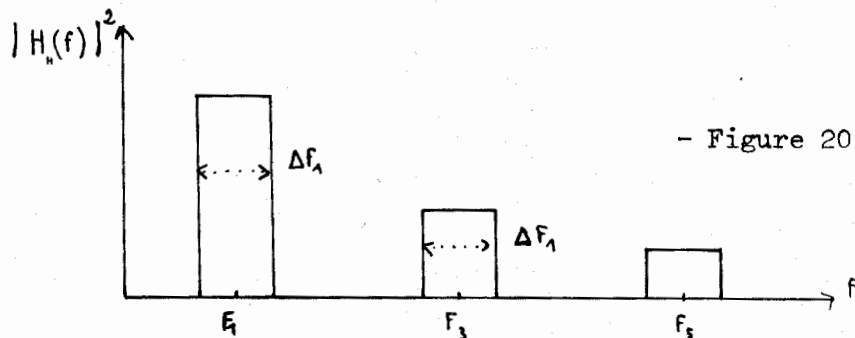
Si le temps mort $T_M = \frac{\tau}{2}$

$$f_i = \frac{1}{3\tau} \quad \Delta f_h = \frac{\pi^2}{9} \cdot \frac{f_i}{N} \quad \frac{\Delta f_h}{f_i} = \frac{\pi^2}{9} \cdot \frac{1}{N}$$



L'approximation par un seul filtre rectangle est justifiée pour l'analyse du bruit blanc de fréquence; pour certains types de bruit, il est nécessaire de

décomposer la fonction de transfert en une série de filtres rectangles, centrés sur les fréquences f_n , ayant respectivement pour hauteur $|H_H(f_n)|^2$ et comme largeur de bande $\Delta f_1 = \frac{f_1}{N}$ (voir annexe B).



- Figure 20 -

Les deux définitions conduisent à la même propriété : la largeur de bande du ou des filtres équivalents est inversement proportionnelle au nombre de mesures. On peut donc rendre Δf très petit en augmentant N . Pour obtenir une grande sélectivité, la durée totale de mesure sera importante et un compromis sera nécessaire entre la sélectivité et une durée de mesure raisonnable. La technologie impose à un filtre réel une bande passante minimale de l'ordre du hertz ; celle-ci peut être inférieure au centième de hertz avec la variance de Hadamard. Ce gain en sélectivité est possible par le fait que l'analyse spectrale de Hadamard est basée sur une relation temps-fréquence : la réduction de la bande passante est liée à l'augmentation de la durée totale de mesure.

II.2.2 - Relation entre $\sigma_H^2(N, T, \tau)$ et $S_\phi(f)$

Deux hypothèses sont nécessaires pour établir une relation simple entre $\sigma_H^2(N, T, \tau)$ et la densité spectrale des fluctuations de fréquence :

- la fonction de transfert $|H_H(f)|^2$ est approximée par les filtres rectangles précédemment décrits.
- $S_\phi(f)$ est sensiblement constant dans les bandes d'analyse Δf_1 (on peut rendre ces filtres très sélectifs).

La première définition de la largeur de bande permet un développement simple de la relation [76] :

$$\sigma_H^2(N, T, \tau) = \int_0^{+\infty} S_\phi(f) |H_H(f)|^2 df \quad (T = T_m + \tau)$$

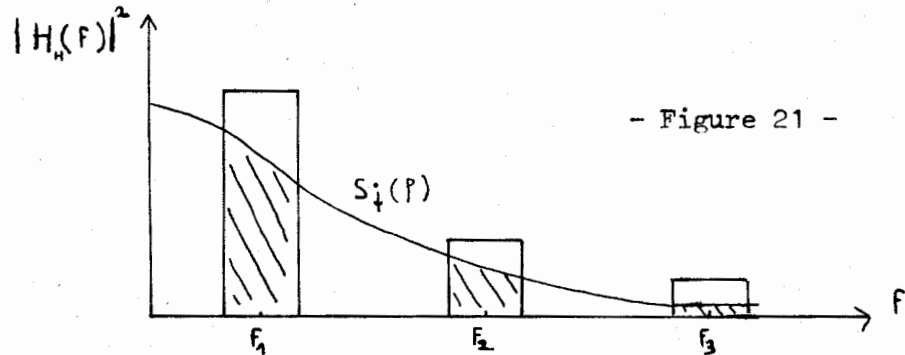
$$\sigma_H^2(N, T, \tau) \simeq S_\phi(f_1) |H_H(f_1)|^2 \Delta f_1$$

$$S_\phi(f_1) \simeq \frac{\sigma_H^2(N, T, \tau)}{|H_H(f_1)|^2 \Delta f_1}$$

Pour $T_M = 0$, $T_M = \frac{\tau}{2}$ et $T_M = \tau$, on avait $|H(f_n)|^2 \Delta f = \frac{N}{\tau}$

$$(81) \quad S_{\dot{\phi}}(f_1) \approx \frac{\tau}{N} \cdot \sigma_h^2(N, T, \tau)$$

Nous avons remarqué dans le paragraphe précédent que cette approximation n'est valable que pour l'analyse d'un bruit blanc de fréquence, pour certains autres types de bruit, il faut utiliser la décomposition sur les harmoniques :



- Figure 21 -

$$\sigma_h^2(N, T, \tau) = \sum_{n \text{ impair}} S_{\dot{\phi}}(f_n) |H(f_n)|^2 \Delta f$$

Pour $T_M = \frac{\tau}{2}$

$$\sigma_h^2(N, \frac{3\tau}{2}, \tau) = \frac{9N}{\pi^2 \tau} \sum_{\substack{n \text{ impair} \\ \neq 3m}} \frac{1}{n^2} S_{\dot{\phi}}(f_n)$$

Pour $T_M = 0$, $T_M = \tau$

$$\sigma_h^2(N, T, \tau) = \frac{8N}{\pi^2 \tau} \sum_{n \text{ impair}} \frac{1}{n^2} S_{\dot{\phi}}(f_n)$$

soit :

$$(82) \quad S_{\dot{\phi}}(f_1) = \frac{\tau}{8N} \pi^2 \cdot \sigma_h^2(N, T, \tau) \cdot \left[1 - \sum_{n \text{ impair}} \frac{1}{n^2} S_{\dot{\phi}}(f_n) \right]$$

On ne peut négliger les termes harmoniques qu'avec beaucoup de prudence car l'erreur introduite peut être élevée pour certains spectres (voir § II.2.4).

II.2.3 - Limitation en fréquence.

La bande passante des filtres des analyseurs de spectre classiques n'est jamais inférieure à quelques dizaines de hertz ou à quelques hertz pour des raisons de

technologie. Cette largeur de bande impose une limitation dans l'analyse basse fréquence. La méthode de Hadamard présenterait un grand intérêt si elle complétait les méthodes classiques dans le domaine des basses fréquences.

a) Fréquence minimale d'analyse.

Le pic fondamental de la fonction de transfert est centré sur la fréquence f_0 :

$$f_1 = \frac{1}{2(\tau + T_M)}$$

$\left\{ \begin{array}{l} \tau \text{ temps de mesure} \\ T_M \text{ temps mort entre deux} \\ \text{mesures successives.} \end{array} \right.$

Cette fréquence d'analyse sera minimale quand $(\tau + T_M)$ sera maximum.

Une première limitation provient de la durée maximale de mesure du fréquencemètre (τ maximum). Pour $\tau = \tau_{\max}$, on peut augmenter le temps mort T_M mais l'amplitude relative des pics harmoniques tend alors vers l'unité.

Si nous imposons comme rapport minimum l'amplitude relative des harmoniques quand $T_M = 0$, on obtient $T_{\max} = \tau$. La fréquence minimale est donnée par :

(83)

$$f_m = \frac{1}{4\tau_{\max}}$$

Exemple : Pour une durée de mesure maximum égale à 100 secondes, cette relation donne $f_m = 2,5$ mHz. Le gain sur la limite basse fréquence est appréciable car les analyseurs BF classiques descendent rarement en-dessous de quelques dizaines de hertz ou de quelques hertz pour certains modèles.

Cette valeur de f_m n'est pas toujours utilisable, pour deux raisons :

- si la non-stationnarité de l'oscillateur à étudier est significative pour $\tau = \tau_{\max}$, les résultats tiennent alors compte du bruit stationnaire et de cette non-stationnarité. La mesure de la variance d'Allan peut donner des informations sur le temps τ , au dessus duquel les phénomènes non-stationnaires apparaissent.
- Nous étudierons dans un prochain paragraphe une limitation inhérente au principe de cette méthode de mesure qui imposera une autre valeur de la fréquence minimale.

b) Fréquence maximale d'analyse.

Il faut diminuer $(\tau + T_M)$ pour augmenter la fréquence d'analyse. L'appareil de mesure, le fréquencemètre en l'occurrence, impose toujours un temps mort minimum $T_{\min}$. Pour cette valeur de T , on augmente f , en diminuant le temps de mesure τ .

Mais τ ne peut pas dépasser une certaine valeur minimale, car l'amplitude relative des pics harmoniques tend vers l'unité.

La condition : $|H(f_3)|^2 = \frac{1}{9} |H(f_1)|^2$ impose $\tau_{\min} = T_{\min}$.

(84) La fréquence maximale devient : $f_1 \max = \frac{1}{4T_{\min}}$.

Exemple : le fréquencesmètre utilisé pour ces mesures impose $T_M = 3 \cdot 10^{-3} s$, soit $f \max \approx 80 Hz$. Cette limite recoupe la gamme des analyseurs BF classiques. Pour des valeurs de τ inférieures à $T_{\min}$, la contribution des harmoniques introduit une erreur importante. Il faut noter aussi que cette erreur dépend du spectre analysé.

II.2.4 - Etude de quelques cas particuliers

Le principal intérêt de la variance de Hadamard est de permettre une analyse spectrale dans un domaine de fréquence accessible à peu d'analyseurs de spectre. Dans la bande d'analyse ($f_{\min}$, $f_{\max}$) l'erreur systématique introduite par les harmoniques impairs peut modifier la nature du spectre étudié.

a) Bruit blanc de fréquence.: $S_{\phi}(f) = K_2$

Le bruit thermique interne des oscillateurs crée un bruit blanc de fréquence (dans un domaine de fréquence limité). Pour étudier l'influence des réponses parasites, il faut considérer le développement de la fonction de transfert sur toutes les fréquences harmoniques :

$$\langle \sigma_H^2(N, T, \tau) \rangle = \sum_{n \text{ impair}} S_{\phi}(f_n) |H_H(f_n)|^2 \Delta f$$

Pour $T_M = 0$ et $T_M = \tau$:

$$\langle \sigma_H^2(N, T, \tau) \rangle = \frac{8NK_2}{\pi^2 \tau} \sum_{n \text{ impair}} \frac{1}{n^2} = \frac{NK_2}{\tau}$$

Pour $T_M = \frac{\tau}{2}$

$$\langle \sigma_H^2(N, \frac{3\tau}{2}, \tau) \rangle = \frac{9NK_2}{\pi^2 \tau} \sum_{n \text{ impair}}^{\approx 3m} \frac{1}{n^2} = \frac{NK_2}{\tau}$$

Ces relations donnent la valeur de la variance de Hadamard que l'on obtiendrait par mesure expérimentale :

(85) $\langle \sigma_H^2(N, T, \tau) \rangle = \frac{NK_2}{\tau}$

En reportant cette valeur dans la relation [80], résultant de l'approximation par un seul filtre d'analyse, on obtient la valeur exacte du spectre :

$$(86) \quad S_{\dot{\phi}}(f) = \frac{\tau}{N} \langle \sigma_H^2(N, T, \tau) \rangle = K_2$$

La détermination de $S_{\dot{\phi}}(f)$ se fera donc sans biais. Si nous reportons la valeur de $\langle \sigma_H^2(N, T, \tau) \rangle$ dans le premier terme de l'expression [82], nous obtenons :

pour $T_n = 0$ et $T_n = \tau$

$$S_{\dot{\phi}}(f) = \frac{\pi^2}{8} \cdot \frac{\tau}{N} \langle \sigma_H^2(N, T, \tau) \rangle = \frac{\pi^2}{8} K_2$$

soit une erreur relative de 0,9 dB.

pour $T_M = \frac{\tau}{2}$

$$S_{\dot{\phi}}(f) = \frac{\pi^2}{9} \cdot \frac{\tau}{N} \langle \sigma_H^2(N, T, \tau) \rangle = \frac{\pi^2}{9} K_2$$

soit une erreur relative de 0,4 dB.

Pour le bruit blanc de fréquence, la nature du spectre étudié n'est pas modifiée et le biais introduit par les approximations est toujours inférieur à 1 dB.

b) Bruit blanc de phase.

Le bruit thermique externe des oscillateurs crée un bruit blanc de phase :

$$S_{\phi}(f) = \begin{cases} K_0 & 0 \leq f \leq f_u \\ 0 & f > f_u \end{cases}$$

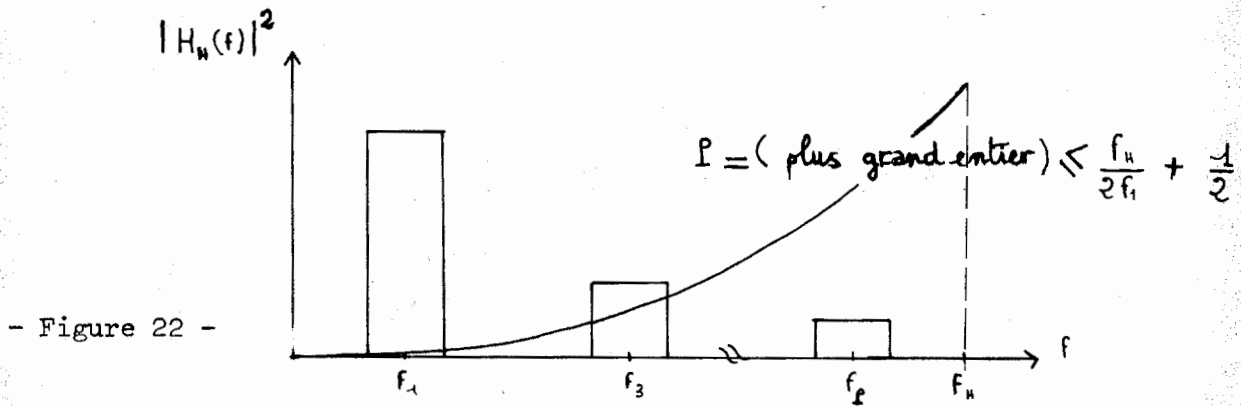
Le spectre étant borné, on peut appliquer la relation suivante :

$$S_{\dot{\phi}}(f) = 4 \pi^2 f^2 S_{\phi}(f)$$

soit :

$$S_{\dot{\phi}}(f) = 4 K_0 \pi^2 f^2 \quad 0 \leq f \leq f_u$$

Dans la bande passante f_H , la fonction de transfert de Hadamard comporte P pics d'analyse :



Si f_H est très grand devant f_1 , la relation donnant P peut se simplifier :

$$P \approx \frac{f_H}{2 f_1}$$

Expérimentalement, on mesurera une variance comportant P termes :

$$\langle \sigma_n^2(N, T, \tau) \rangle = \sum_{n=1}^P 4\pi^2 k_0 (n f_1)^2 |H_H(n f_1)|^2 \Delta f$$

Pour $T_n = 0$ et $T_n = \frac{\tau}{2}$

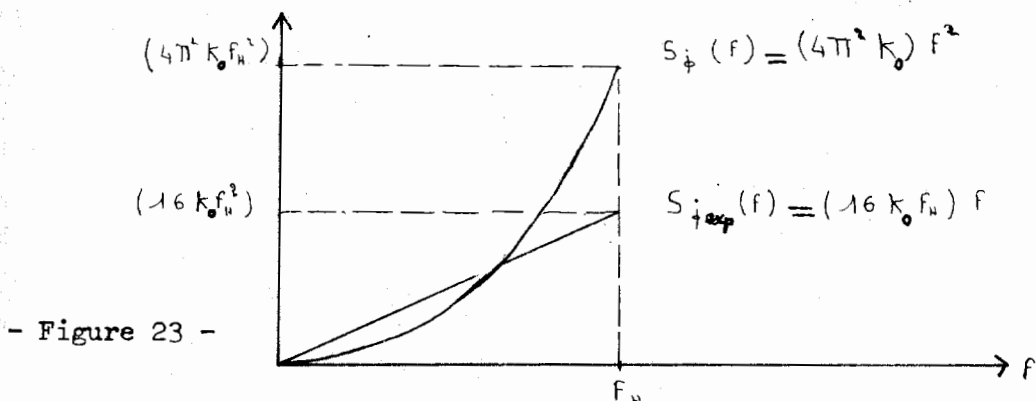
$$\langle \sigma_n^2(N, T, \tau) \rangle = \frac{8 N P}{\pi^2 \tau} (4\pi^2 k_0 f_1) = \frac{8 N P}{\pi^2 \tau} S_{\dagger}(f_1)$$

En reportant cette valeur dans la relation [80] résultant de l'approximation par un seul filtre d'analyse, on en déduit la valeur suivante pour le spectre :

$$(87) \quad S_{\dagger \exp}(f_1) = \frac{\langle \sigma_n^2(N, T, \tau) \rangle}{|H_H(f_1)|^2 \Delta f} = \frac{8}{\pi^2} P S_{\dagger}(f_1)$$

La valeur déterminée avec cette approximation représente P fois la valeur cherchée. Si f_H est grand devant f_1 , le biais de la mesure est important ; mais une erreur plus fondamentale est introduite. La nature du spectre est modifiée :

$$(88) \quad S_{\dagger \exp}(f_1) = \frac{8}{\pi^2} P S_{\dagger}(f_1) = (16 k_0 f_H) f_1$$



c) Modèle lorentzien.

Considérons un bruit de phase possédant un spectre lorentzien :

$$(89) \quad S_{\phi}(f) = \frac{2\alpha \overline{\phi^2(t)}}{\pi} \cdot \frac{1}{\alpha^2 + f^2}$$

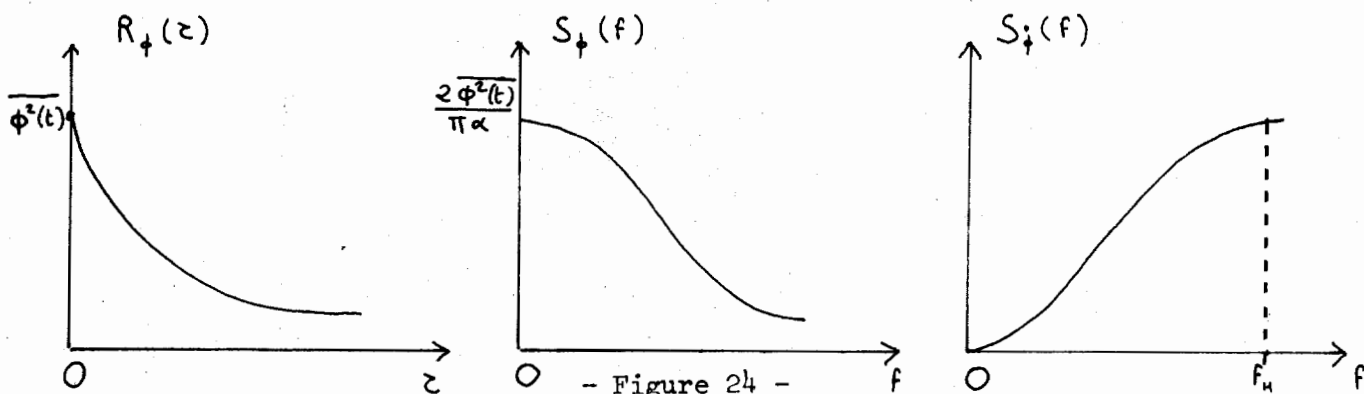
α : largeur à mi-hauteur.
 $\overline{\phi^2(t)}$: puissance moyenne du bruit :

La transformée de Fourier de $S_{\phi}(f)$ nous donne la fonction d'autocorrélation :

$$R_{\phi}(\tau) = \overline{\phi^2(t)} \cdot e^{-\alpha|\tau|}$$

Le bruit de phase est stationnaire du second ordre, mais la puissance moyenne du bruit de fréquence $\int_0^{\infty} S_{\dot{\phi}}(f) df$ est infinie si l'on utilise sans précaution la relation $S_{\dot{\phi}}(f) = 4\pi^2 f^2 S_{\phi}(f)$. Il faut imposer une fréquence de coupure f_H

$$S_{\dot{\phi}}(f) = \frac{2\alpha \overline{\phi^2(t)}}{\pi} \cdot \frac{4\pi^2 f^2}{\alpha^2 + f^2}$$



- Figure 24 -

La variance de Hadamard s'écrit :

$$\langle \sigma_H^2(N, T, \tau) \rangle = \frac{2\alpha \overline{\phi^2(t)}}{\pi} \cdot 4\pi^2 \sum_{n \text{ impair}}^{N_{f_H}} \left(\frac{(n f_1)^2}{(n f_1)^2 + \alpha^2} |H_n(f_n)|^2 \Delta f \right)$$

On note I_1 la contribution du pic fondamental :

$$(90) \quad I_1 = 2\alpha \overline{\phi^2(t)} \cdot 4\pi \left[\frac{f_1^2}{\alpha^2 + f_1^2} \cdot 4N^2 \left(\frac{\sin \pi \tau f_1}{\pi \tau f_1} \right)^2 \Delta f \right]$$

I_n est la contribution de l'harmonique n :

$$(91) \quad I_n = 2\alpha \overline{\phi^2(t)} 4\pi^2 \left[\frac{n^2 f_1^2}{\alpha^2 + n^2 f_1^2} \cdot 4N^2 \left(\frac{\sin \pi \tau n f_1}{\pi \tau n f_1} \right)^2 \Delta f \right]$$

La contribution relative de cet harmonique est alors :

$$(92) \quad \frac{I_n}{I_1} = \left(\frac{\sin \pi \tau n f_1}{\sin \pi \tau f_1} \right) \cdot \left(\frac{\alpha^2 + f_1^2}{\alpha^2 + n^2 f_1^2} \right)$$

pour $T_M = 0$ $f_1 = \frac{1}{2\tau}$ et pour $T_M = \tau$ $f_1 = \frac{1}{4\tau}$

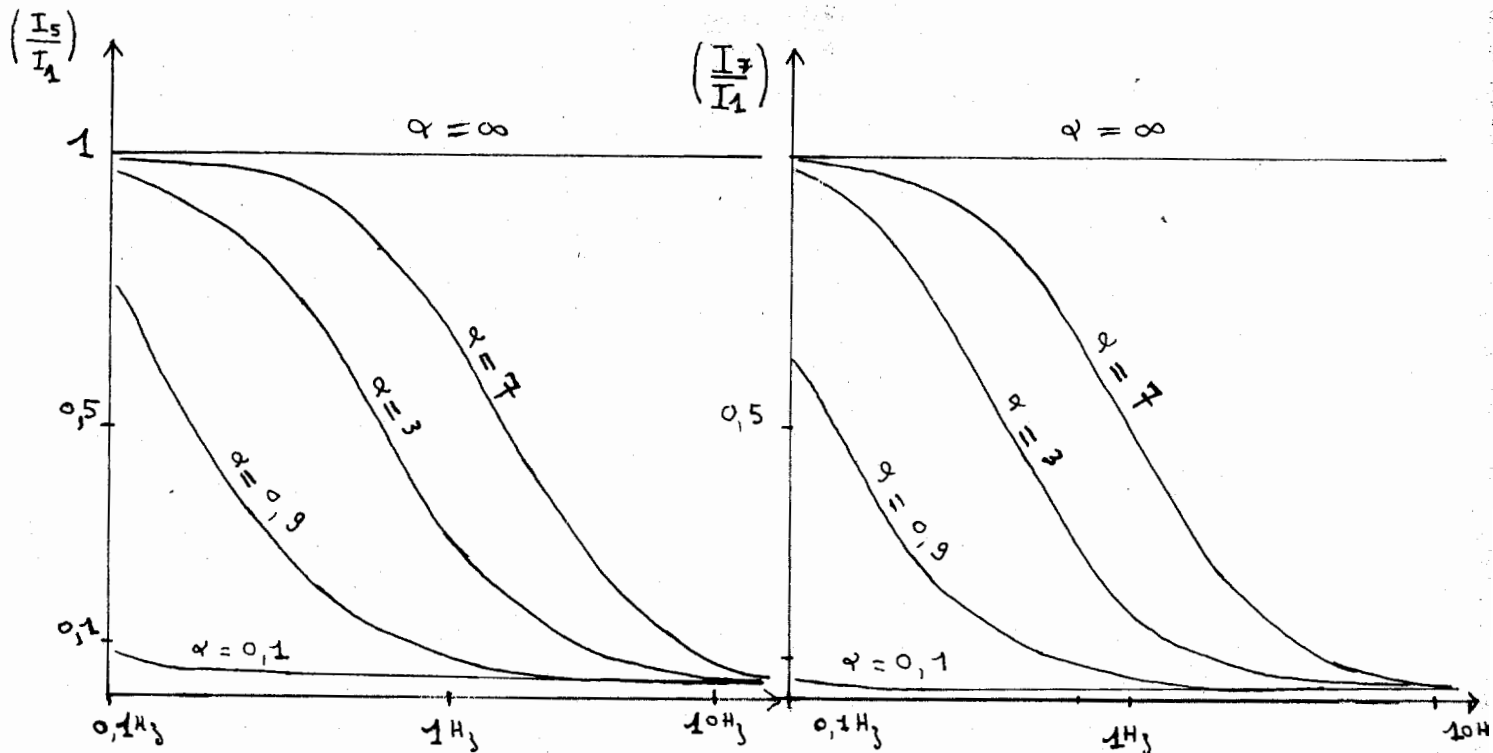
$$(93) \quad \frac{I_n}{I_1} = \left(\frac{\alpha^2 + f_1^2}{\alpha^2 + n^2 f_1^2} \right)$$

1 - pour $f_1 \gg \alpha$ $\frac{I_n}{I_1} = \frac{1}{n^2}$

l'influence des harmoniques $\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_n}{I_1} \right]$ introduit une erreur faible :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \left(\frac{\pi^2}{6} - 1 \right) = 0,23$$

2 - les courbes $\frac{I_n}{I_1}$ ont été tracées en fonction de n , α , f :



- Figure 25 -

En dessous d'une fréquence f_c , l'erreur introduite par les harmoniques est importante. Les mesures ne seront plus significatives. Nous pouvons remarquer que f_c dépend de α , donc de la largeur de la courbe de corrélation $R_\phi(\tau)$. Si le bruit est faiblement corrélé, alors la fréquence de coupure f_c sera élevée. Nous généraliserons ce résultat dans le paragraphe II.3.

II.2.5 - Pondération des mesures

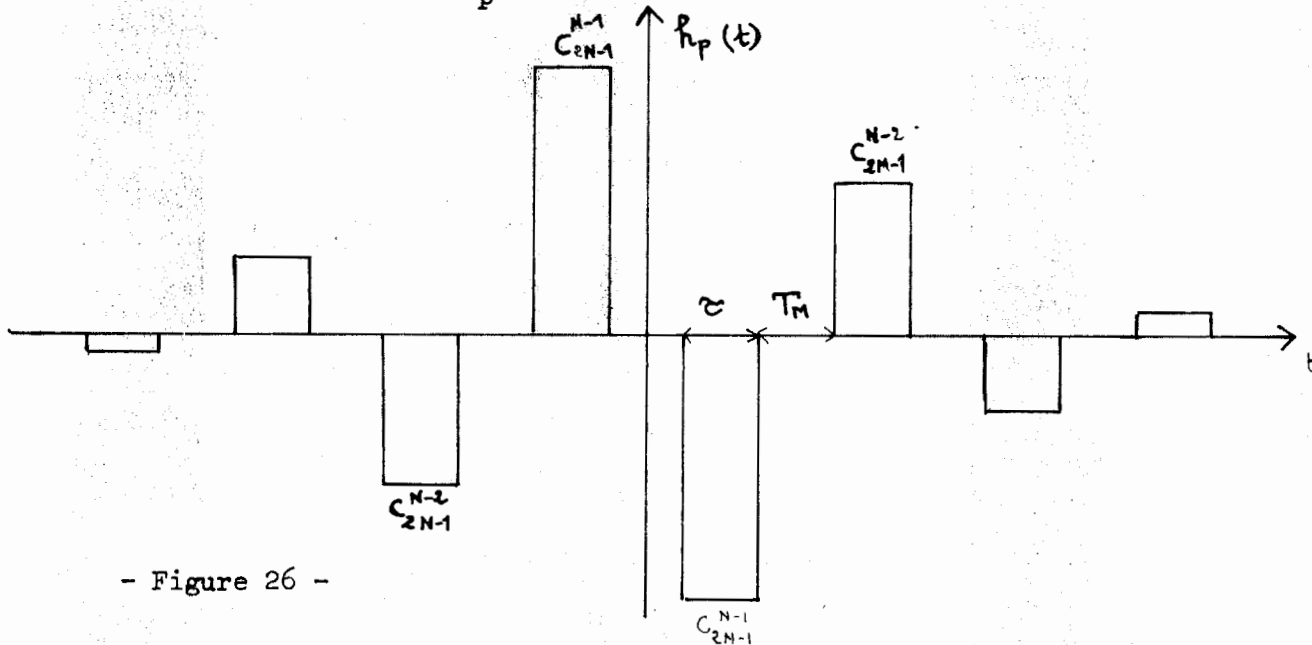
La fonction de transfert de Hadamard possède certains inconvénients, notamment la présence des pics harmoniques. Il est intéressant d'étudier les modifications possibles du processus de mesure en vue d'une amélioration de la fonction de transfert. Nous allons considérer deux transformations du cycle de mesure :

- une pondération sur l'ensemble du processus de mesure ;
- un découpage de chaque mesure.

a) Pondération sur l'ensemble du processus de mesure.

A partir des $2N$ résultats de mesure, nous allons pondérer la $(p + 1)$ ème mesure par le coefficient CP_{2N-1} ($p = 0, 1, \dots, 2N-1$).

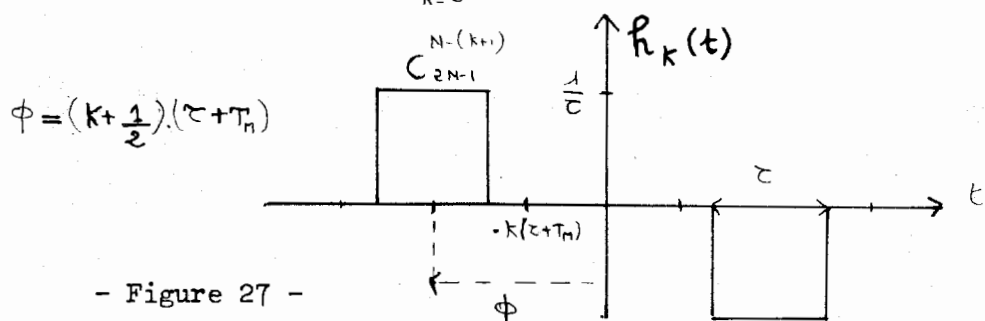
Le cycle de mesure pondéré $h_p(t)$ est alors représenté par la figure :



- Figure 26 -

Nous pouvons décomposer $h_p(t)$ en série :

$$h_p(t) = \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^{k+1} h_k(t) \quad (N \text{ est impair})$$



- Figure 27 -

$h_k(t)$ a pour transformée de Fourier : (Réf (18))

$$H_k(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h_k(t) \cdot e^{-j \omega t} dt$$

$$H_k(f) = \frac{1}{\tau} C_{2N-1}^{N-(k+1)} \left(\frac{\sin \pi \tau f}{\pi \tau f} \right) \cdot e^{+j \omega (k+\frac{1}{2})(\tau+\tau_n)} \\ - \frac{1}{\tau} C_{2N-1}^{N-(k+1)} \left(\frac{\sin \pi \tau f}{\pi \tau f} \right) e^{-j \omega (k+\frac{1}{2})(\tau+\tau_n)}$$

$$(94) \quad H_k(f) = 2j C_{2N-1}^{N+k} \left(\frac{\sin \pi \tau f}{\pi \tau f} \right) \sin[2\pi f (k+\frac{1}{2})(\tau+\tau_n)]$$

La transformation de Fourier étant une opération linéaire :

$$H_p(f) = \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^{k+1} \cdot H_k(f)$$

$$(95) \quad H_p(f) = 2j \left(\frac{\sin \pi \tau f}{\pi \tau f} \right) \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^{k+1} C_{2N-1}^{N+k} \sin[2\pi f (k+\frac{1}{2})(\tau+\tau_n)]$$

La relation suivante :

$$(96) \quad 2 \sin x = \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k C_{2N-1}^{N+k} \sin[(2k+1)x]$$

permet d'écrire (*) :

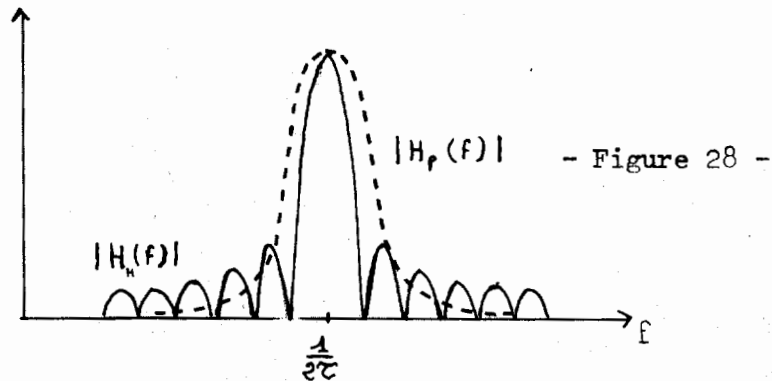
$$(97) \quad |H_p(f)| = 2^{2N-1} \left| \left(\frac{\sin \pi \tau f}{\pi \tau f} \right) \sin[\pi (\tau+\tau_n) f] \right|$$

* Cette relation a été également obtenue (13) en calculant le filtrage correspondant à la $n^{\text{ème}}$ différence sur la phase qui introduit implicitement les coefficients C_n^p (31).

Pour $T_M = 0$:

(98)

$$|H_f(f)| = 2^{2N-1} \left| \frac{\sin^{2N}[\pi \tau f]}{\pi \tau f} \right|$$



Remarques :

- La nouvelle fonction de transfert ainsi obtenue est dépourvue de lobes latéraux, son atténuation en dehors de la bande passante est plus importante.
- La pondération entraîne un élargissement de la bande passante.
- La difficulté majeure de la méthode n'est pas levée car les harmoniques conservent la même amplitude relative. Une pondération de ce type ne peut pas apporter d'amélioration sur ce point car, le processus de mesure de la variance de Hadamard étant schématisé par une fonction de Walsh ($0 - 2N\tau$), la pondération par les coefficients C_n^D possède les trois caractéristiques suivantes :
 - elle est centrée par rapport à l'instant $t_0 = N\tau$;
 - elle est définie sur un intervalle $t = 2N\tau$;
 - son maximum est au centre de cet intervalle.

Considérons une fonction continue ayant les mêmes propriétés, comme approximation de cette pondération : (t_0 : origine des temps)

$$R_p(t) = A \left(\frac{\sin\left(\frac{t}{2N\tau}\right)}{\left(\frac{t}{2N\tau}\right)} \right)$$

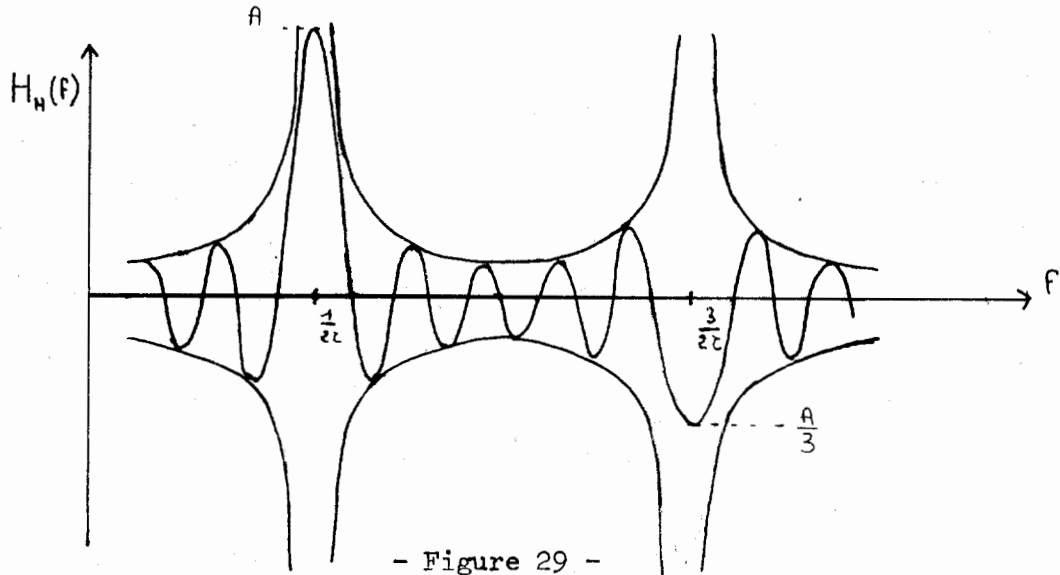
Le nouveau processus de mesure s'écrit :

$$R'_H(t) = R_H(t) \times R_p(t)$$

La transformée de Fourier du processus $h'_H(t)$ est la convolution de la fonction de transfert de Hadamard et de la fonction de transfert $H_p(f) = \text{TF}[h_p(t)]$:

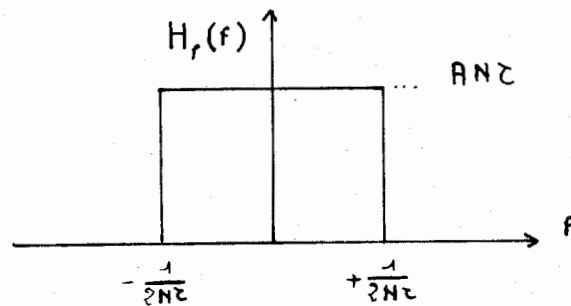
$$|H'_H(f)| = |H_H(f) \otimes H_p(f)|$$

La fonction de transfert de Hadamard est représentée par la courbe suivante :

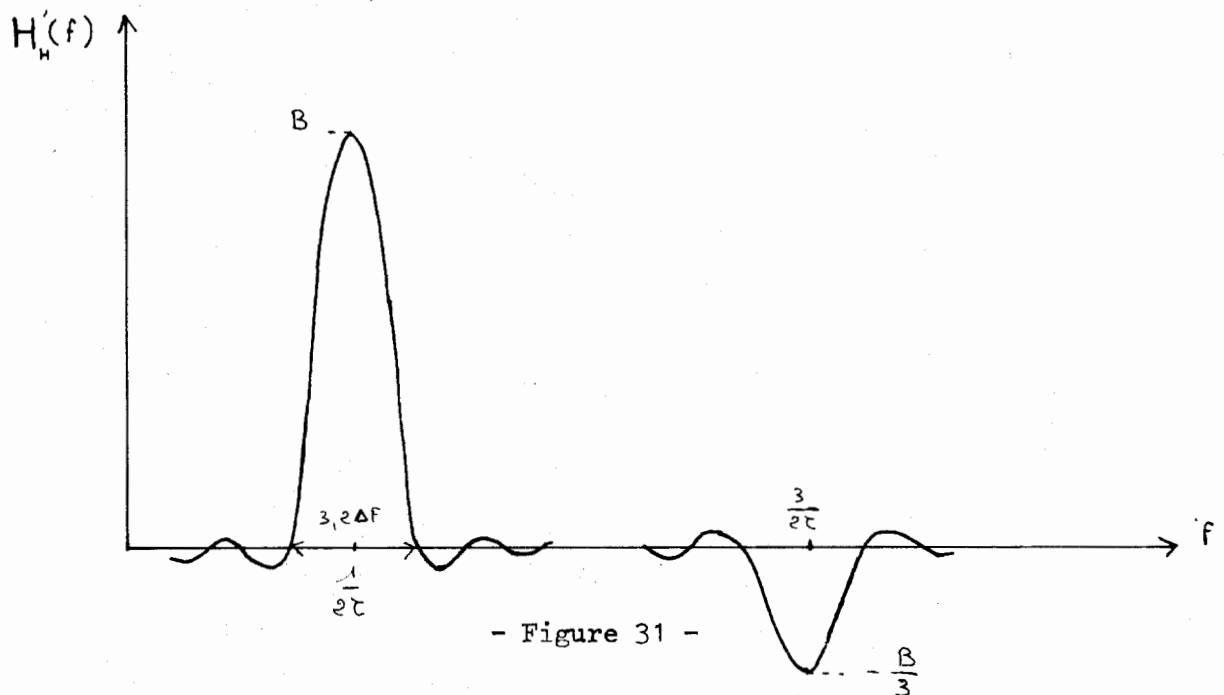


Le calcul de la transformée de Fourier de la fonction $h_p(t)$ donne :

$$H_f(f) = \text{T.F.} \left[A \frac{\sin \frac{t}{2N\tau}}{\frac{t}{2N\tau}} \right] = \Pi_{\frac{1}{N\tau}}(AN\tau)$$



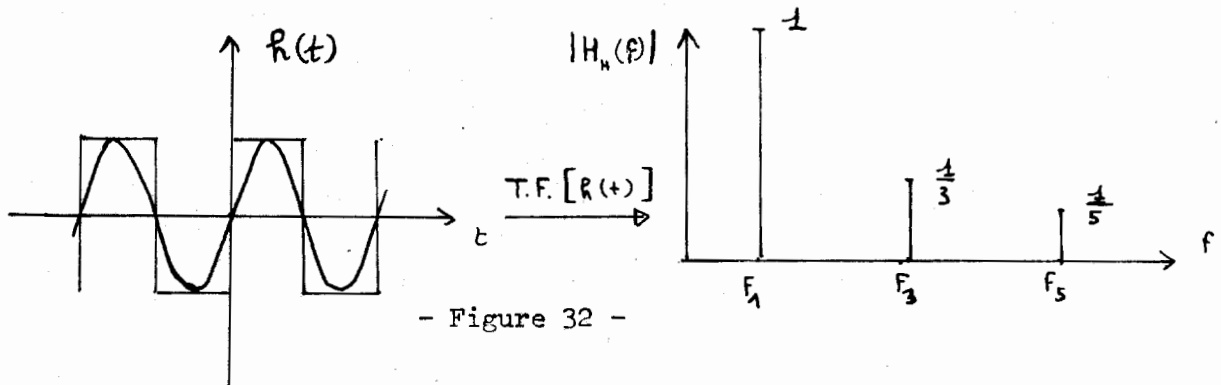
La courbe [31] représente la convolution de ces deux fonctions :



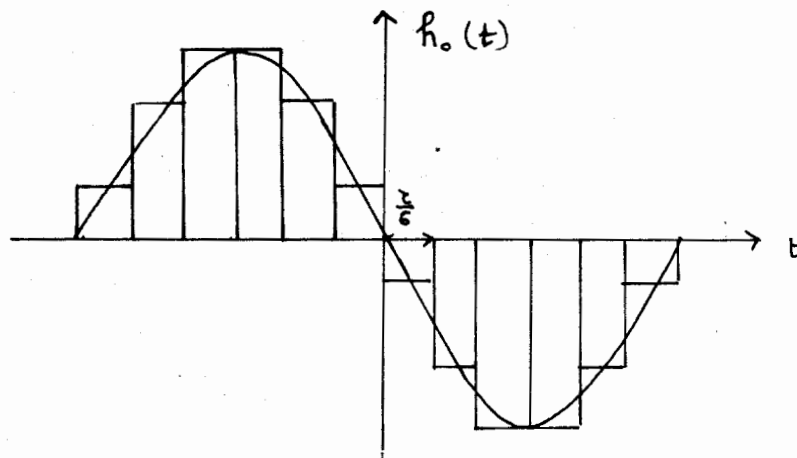
Les propriétés de la nouvelle fonction de transfert de Hadamard proviennent de la convolution de $H_H(f)$ avec un filtre passe bande de largeur $\Delta f = \frac{1}{N\tau}$. Ce filtre moyenne l'ondulation des bandes latérales des pics d'analyse ; l'atténuation devient alors importante car cette ondulation était symétrique par rapport à l'axe (of). Chaque pic étant multiplié par un facteur constant (égal à A), l'amplitude relative des harmoniques n'est pas modifiée. Ces résultats restent valables pour toutes pondérations définies comme précédemment.

b) Pondération pseudo-sinusoidale.

Le processus de mesure de la variance de Hadamard est une approximation au premier ordre d'une sinusoïde introduisant des réponses parasites aux harmoniques impairs de la fréquence analysée. Une approche plus précise de cette sinusoïde permet d'atténuer l'amplitude de ces harmoniques.



Considérons un cycle $h_o(t)$ où chaque mesure de durée τ est découpée en six mesures de durée $\frac{\tau}{6}$:



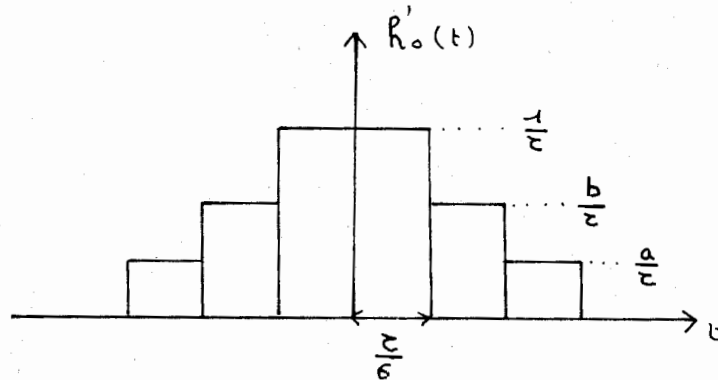
- Figure 33 -

Nous avons avec le cycle $h(t)$:

$$(99) \quad |H_h(f)| = \left| \frac{\sin \pi \tau f}{\pi \tau f} \cdot \frac{\sin 2\pi N \tau f}{\cos \pi \tau f} \right| = \left| \frac{\sin \pi \tau f}{\pi \tau f} \right| \cdot F(\tau, f)$$

La fonction de transfert $\left(\frac{\sin \pi \tau f}{\pi \tau f} \right)$ provient de la transformée de Fourier d'une mesure de durée τ .

Cette mesure étant remplacée par la fonction $h'_0(t)$:

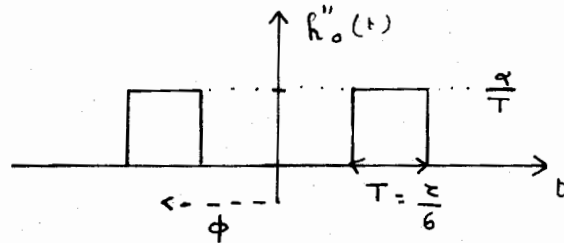


- Figure 34 -

on obtient la nouvelle fonction de transfert de Hadamard avec la relation suivante :

$$|H_h(f)| = |H'_0(f)| \cdot F(\tau, f)$$

Calcul de $H'_0(f)$



- Figure 35 -

$$(100) \quad \text{T. F. } [h''_0(t)] = \alpha \frac{\sin \pi T f}{\pi T f} \left(e^{j\omega\phi} + e^{-j\omega\phi} \right) = \frac{\sin \pi T f}{\pi T f} \cdot 2\alpha \cos(\omega\phi)$$

$$(101) \quad h'_0(t) = a h''_0(t - 2.5T) + b h''_0(t - 1.5T) + h''_0(t - 0.5T)$$

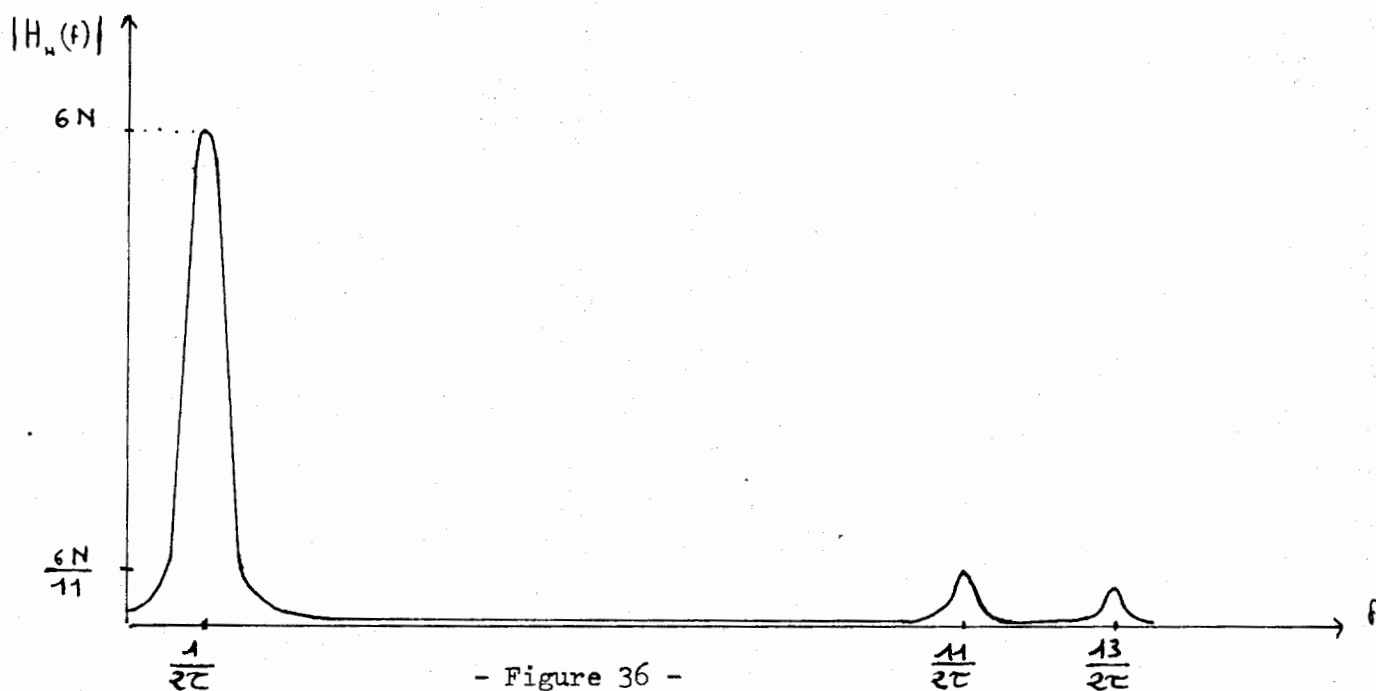
$$(102) \quad \text{T. F. } [h'_0(t)] = \left(\frac{\sin \pi T f}{\pi T f} \right) \left[2a \cos 5\pi T f + 2b \cos 3\pi T f + 2 \cos \pi T f \right]$$

Remarque : les valeurs de a et b ont été calculées afin d'annuler les pics 3, 5, 7, 9. (annexe C).

$$(103) \quad a = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} \quad b = \sqrt{3} - 1$$

La nouvelle fonction de transfert de Hadamard a pour expression :

$$(104) \quad |H_n(f)| = \left| \left(\frac{\sin \pi \frac{\tau}{2} f}{\pi \frac{\tau}{2} f} \right) \cdot \left[0,53 \cos \frac{5\pi \tau f}{6} + 1,5 \cos \frac{3\pi \tau f}{6} + 2 \cos \frac{\pi \tau f}{6} \right] \left(\frac{\sin 2N\pi \tau f}{\cos \pi \tau f} \right) \right|$$



Nous pouvons constater ainsi une réduction importante du contenu harmonique de la fonction de transfert. Le premier pic parasite correspond au 11ème harmonique : son amplitude relative est donnée par son rang : $\frac{1}{n} = \frac{1}{11}$.

Il faut noter que pour une fréquence d'analyse f_0 , le temps global de mesure n'est pas modifié ; mais, il faut effectuer six fois plus de mesures.

La réalisation d'un cycle de mesures tel qu'il est proposé, ne peut se faire que si l'on dispose d'un calculateur performant : le programme de nouveaux cycles de mesure nécessite plusieurs mémoires.

II.3 - Influence de la méthode de mesure sur le spectre à étudier.

L'étude de la fonction de transfert de Hadamard a permis de montrer que l'on pouvait faire de l'analyse spectrale dans une bande d'analyse limitée à partir de mesures effectuées dans le domaine temps. Nous allons mettre en évidence une limitation inhérente à cette méthode de mesure en établissant la relation entre $\langle \sigma_H^2(N, T, \tau) \rangle$ et la fonction d'autocorrélation $R_\phi(\tau)$. Nous supposons donc que le bruit de phase est stationnaire du second ordre.

II.3.1 - Relation entre $\langle \sigma_H^2(N, T, \tau) \rangle$ et $R_\phi(\tau)$

En supposant les mesures adjacentes, on peut écrire :

$$(105) \quad \sigma_H^2(N, \tau, \tau) = \left[\sum_{n=1}^{2N} (-1)^{n+1} \langle \dot{\phi} \rangle_{n, \tau} \right]^2$$

avec $\langle \dot{\phi} \rangle_{n, \tau} = \frac{1}{\tau} \int_{n\tau}^{(n+1)\tau} \dot{\phi}(t) dt$

$$\sigma_H^2(N, \tau, \tau) = \left(\sum_{n=1}^{2N} (-1)^{n+1} \langle \dot{\phi} \rangle_{n, \tau} \right) \cdot \left(\sum_{m=1}^{2N} (-1)^{m+1} \langle \dot{\phi} \rangle_{m, \tau} \right)$$

$$\sigma_H^2(N, \tau, \tau) = \left[\sum_{n=1}^{2N} \langle \dot{\phi} \rangle_{n, \tau}^2 + \sum_{n \neq m}^{2N} \sum_{m=1}^{2N} (-1)^{n-m} \langle \dot{\phi} \rangle_{n, \tau} \langle \dot{\phi} \rangle_{m, \tau} \right]$$

La variance d'échantillon $\sigma_H^2(N, T, \tau)$ étant une variable aléatoire, nous appliquons l'opération linéaire $E[\cdot]$ (espérance mathématique) pour déterminer sa valeur moyenne.

$$(106) \quad E[\sigma_H^2(N, \tau, \tau)] = \left[\sum_{n=1}^{2N} E[\langle \dot{\phi} \rangle_{n, \tau}^2] + \sum_{n \neq m}^{2N} \sum_{m=1}^{2N} (-1)^{n-m} E[\langle \dot{\phi} \rangle_{n, \tau} \langle \dot{\phi} \rangle_{m, \tau}] \right]$$

Les deux relations suivantes vont nous permettre d'exprimer $E[\sigma^2(N, T, \tau)]$ en fonction de $R_\phi(\tau)$: (Réf (8))

$$(107) \quad \left\{ \begin{array}{l} E[\langle \dot{\phi} \rangle_{n,\tau}^2] = \sigma^2[\langle \dot{\phi} \rangle_{n,\tau}] = \int_0^{+\infty} S_\phi(f) \left(\frac{\sin \pi \tau f}{\pi \tau f} \right)^2 df = \frac{U(\tau)}{\tau^2} \\ E[\langle \dot{\phi} \rangle_{n,\tau} \langle \dot{\phi} \rangle_{m,\tau}] = \frac{1}{\tau^2} \int_{n\tau}^{(n+1)\tau} \int_{m\tau}^{(m+1)\tau} R_\phi(t_1 - t_2) dt_1 dt_2 = \\ \frac{1}{\tau^2} \left[U[(n-m-1)\tau] + U[(n-m+1)\tau] - 2U[(n-m)\tau] \right] \end{array} \right.$$

En remplaçant ces résultats dans la relation [106] :

$$(108) \quad E[\sigma_h^2(N, \tau, \tau)] = \left[\sum_{n=1}^{2N} \frac{U(\tau)}{\tau^2} + \sum_{n \neq m} \sum_{\alpha} \frac{(-1)^\alpha}{2\tau^2} \left[U[(\alpha-1)\tau] + U[(\alpha+1)\tau] - 2U[\alpha\tau] \right] \right]$$

avec $\alpha = n - m$

$$(109) \quad E[\sigma_h^2(N, \tau, \tau)] = \left[\frac{2N}{\tau^2} U(\tau) + \sum_{m < n \leq 2} \sum_{\alpha} \frac{(-1)^\alpha}{\tau^2} \left[U[(\alpha-1)\tau] + U[(\alpha+1)\tau] - 2U[\alpha\tau] \right] \right]$$

on simplifie cette relation en l'ordonnant selon τ :

$$(110) \quad E[\sigma^2(N, \tau, \tau)] = \sum_{\beta=1}^{2N} C_\beta U(\beta\tau)$$

Détermination des coefficients C_β :

L'indice n varie de 2..... à $2N$;

l'indice m varie de 1..... à $2N - 1$;

il y a $(2N - x)$ couples (n, m) tel que $n - m = x$.

Une valeur particulière de β peut avoir quatre origines :

a) termes provenant de $U[(\alpha + 1)\tau]$:

$$\alpha + 1 = \beta = n - m + 1 \quad 2 \leq \beta \leq 2N$$

$$x = \beta - 1 \quad \text{on obtient } [2N - (\beta - 1)] \text{ termes.}$$

b) termes provenant de $U[(\alpha - 1)\tau]$:

$$\alpha - 1 = \beta = n - m - 1$$

$$0 \leq \beta \leq 2N - 2$$

$$x = \beta + 1$$

on obtient $[2N - (\beta + 1)]$ termes.

c) termes provenant de $U(\alpha\tau)$.

$$\alpha = \beta = n - m$$

$$1 \leq \beta \leq 2N - 1$$

$$x = \beta$$

on obtient $[2N - \beta]$ termes.

d) termes provenant de $U(\tau)$.

$$\beta = 1$$

nous avons $2N$ termes.

La relation [409] fait intervenir une combinaison linéaire de ces coefficients :

$$\beta = 0$$

$$U(0) = 0$$

$$\beta = 1$$

$$C_1 = 2N + (-1)^2 \cdot (2N - 2) + (-1)^2 \cdot 2(2N - 1)$$

$$C_1 = 8N - 4$$

$$2 \leq \beta \leq 2N - 2$$

$$C_\beta = (-1)^{\beta+1} \cdot (2N - (\beta+1)) + (-1)^{\beta+1} \cdot 2(2N - (\beta+1)) - 2(-1)^\beta \cdot (2N - \beta)$$

$$C_\beta = (8N - 4\beta) \cdot (-1)^{\beta+1}$$

$$\beta = 2N - 1$$

$$C_{2N-1} = (-1)^{\beta+1} \cdot (2N - (\beta-1)) + (-1)^{\beta+1} \cdot 2(2N - \beta)$$

$$C_{2N-1} = 8N - 4\beta$$

$$\beta = 2N$$

$$C_{2N} = (-1)^{\beta+1} \cdot 1 = -1$$

On reporte les valeurs de C_β dans la relation $E[\sigma_H^2] = \sum_{\beta=1}^{2N} C_\beta U(\beta\tau)$. L'espérance mathématique de la variance de Hadamard est alors fonction d'une suite ordonnée selon les multiples du temps de mesure τ :

(111)

$$E[\sigma_H^2(N, \tau, \tau)] = \left[\sum_{\beta=1}^{2N-1} (-1)^{\beta+1} \cdot [8N - 4\beta] \cdot \frac{U(\beta\tau)}{\tau^2} - \frac{U(2N\tau)}{\tau^2} \right]$$

avec :

$$U(\beta\tau) = \int_0^{+\infty} S_{\phi}(f) \left(\frac{\sin \pi \beta \tau f}{\pi f} \right)^2 df$$

Aucune hypothèse n'a encore été faite sur la stationnarité de la phase. Afin d'interpréter cette relation [111], nous allons supposer que les fluctuations de phase sont stationnaires du second ordre. Il vient alors :

$$U(\beta\tau) = 2 \left[R_{\phi}(0) - R_{\phi}(\beta\tau) \right]$$

$$E[\sigma_H^2(N, \tau, \tau)] = \frac{2}{\tau^2} \left[\sum_{\beta}^{2N-1} C_{\beta} \left[R_{\phi}(0) - R_{\phi}(\beta\tau) \right] - \left[R_{\phi}(0) - R_{\phi}(2N\tau) \right] \right]$$

Le développement de ce calcul nous conduit à la relation suivante (voir annexe D).

$$E[\sigma_H^2(N, \tau, \tau)] = \frac{1}{\tau^2} \left[[8N-2] R_{\phi}(0) + \sum_{\beta} (-1)^{\beta} [16N-8\beta] R_{\phi}(\beta\tau) + 2 R_{\phi}(2N\tau) \right]$$

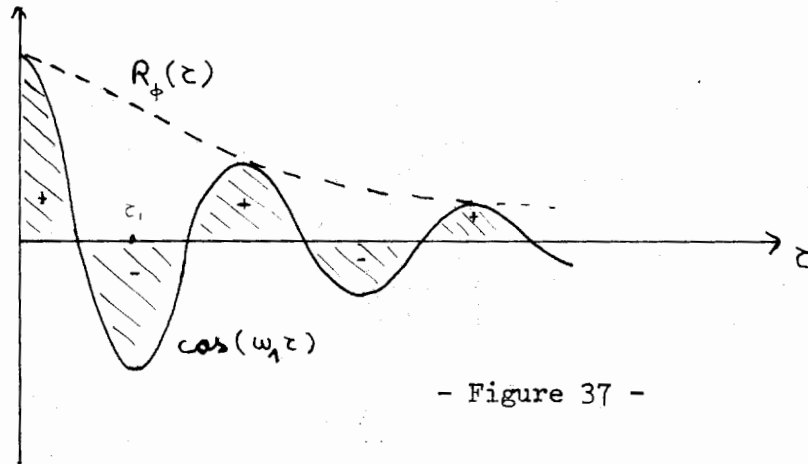
$$(112) \quad E[\sigma_H^2(N, \tau, \tau)] = \frac{8N}{\tau^2} \left[\left[1 - \frac{1}{4N} \right] R_{\phi}(0) + \sum_{\beta} (-1)^{\beta} \left[2 - \frac{\beta}{N} \right] R_{\phi}(\beta\tau) + \frac{1}{4N} R_{\phi}(2N\tau) \right]$$

II.3.2 - Interprétation de la relation.

La fonction d'autocorrélation étant paire, sa transformée de Fourier peut être définie sur l'intervalle $[0, +\infty]$ par la relation :

$$(113) \quad S_{\phi}(f) = 2 \int_0^{+\infty} R_{\phi}(\tau) \cos(\omega \tau) d\tau \quad (\tau \text{ et } f \geq 0)$$

Pour une valeur particulière f_1 , $S_\phi(f_1)$ représente la surface hachurée représentée sur la figure ci-dessous :



- Figure 37 -

La relation donnant l'espérance mathématique de la variance de Hadamard en fonction de $R_\phi(\tau)$ n'est en fait qu'une pseudo-transformée de Fourier et constitue une approximation de l'équation (113).

$$(114) \quad \begin{aligned} E[\sigma_h^2(N, \tau, \tau)] &= \frac{16N}{\tau^3} \left[\left(1 - \frac{1}{4N}\right) R_\phi(0) \frac{\tau}{2} + \sum_{\beta} (-1)^\beta \left(1 - \frac{\beta}{2N}\right) \tau \cdot R_\phi(\beta\tau) + \frac{\tau}{8N} \cdot R_\phi(2N\tau) \right] \\ \frac{\tau^3 E[\sigma_h^2(N, \tau, \tau)]}{8N} &= 2 \left[\left(1 - \frac{1}{4N}\right) R_\phi(0) \frac{\tau}{2} + \sum_{\beta} (-1)^\beta \left(1 - \frac{\beta}{2N}\right) \tau \cdot R_\phi(\beta\tau) + \frac{\tau}{8N} \cdot R_\phi(2N\tau) \right] \end{aligned}$$

$\frac{\tau^3 E[\sigma_h^2(N, \tau, \tau)]}{8N}$ } peut s'exprimer en fonction de la densité spectrale des fluctuations de phase :

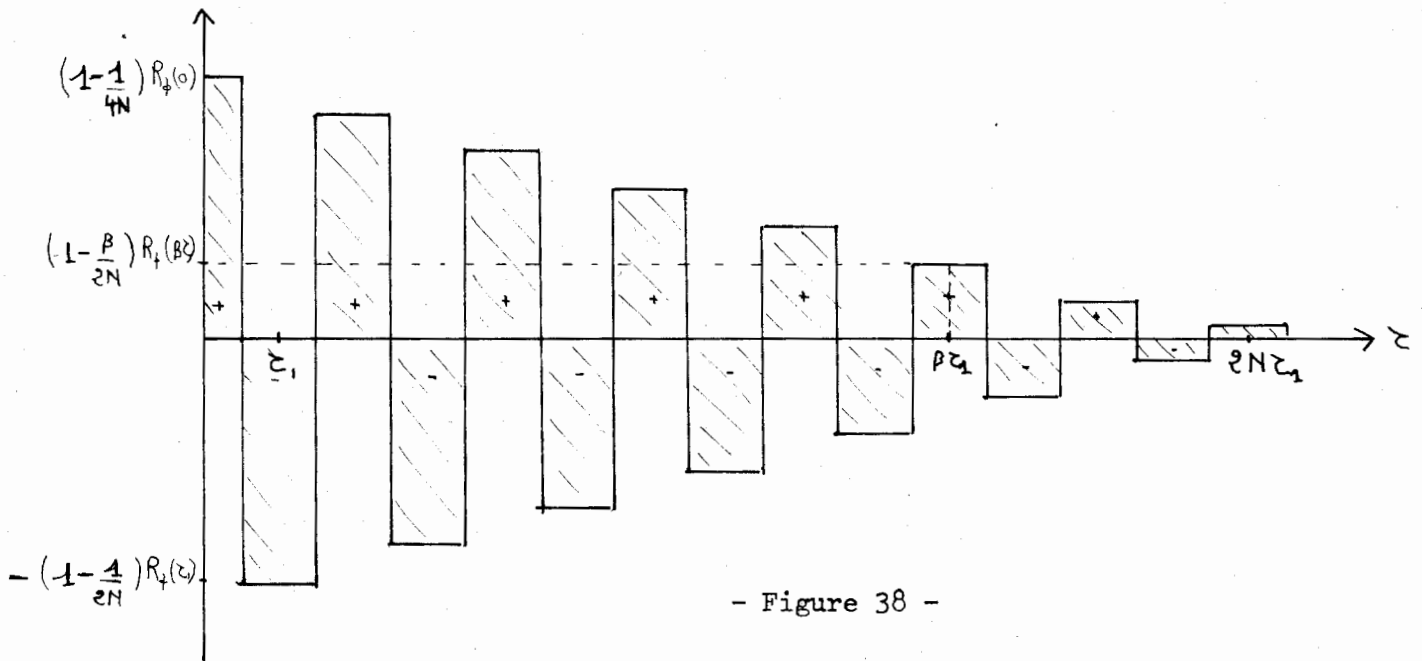
$$S_\phi(f_1) = \frac{1}{4\pi^2 f_1^2} S_\phi(f_1)$$

$$\begin{cases} f_1 = \frac{1}{2\tau} \\ S_\phi(f_1) = \frac{\pi^2}{8} \cdot \frac{\tau}{N} \cdot E[\sigma_h^2(N, \tau, \tau)] \end{cases}$$

$$S_\phi(f_1) = \frac{\tau^3 E[\sigma_h^2(N, \tau, \tau)]}{8N}$$

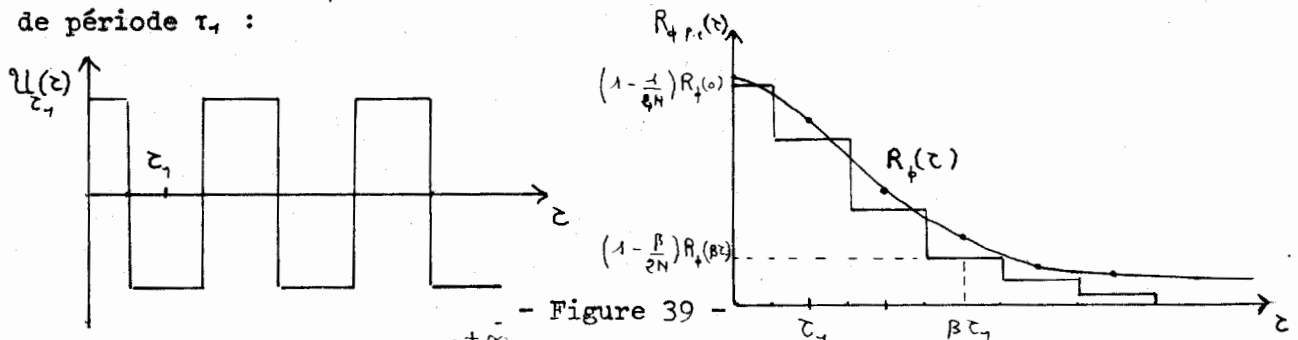
$$(115) \quad S_\phi(f_1) = 2 \left[\left(1 - \frac{1}{4N}\right) R_\phi(0) \frac{\tau}{2} + \sum_{\beta} (-1)^\beta \left(1 - \frac{\beta}{2N}\right) \tau \cdot R_\phi(\beta\tau) + \frac{\tau}{8N} \cdot R_\phi(2N\tau) \right]$$

$S_\phi(\tau_1)$ représente la surface hachurée suivante :



- Figure 38 -

La surface précédente est donnée par l'intégrale du produit de la fonction d'autocorrélation $R_\phi(\tau)$ pondérée et échantillonnée par une fonction de Walsh de période τ_1 :



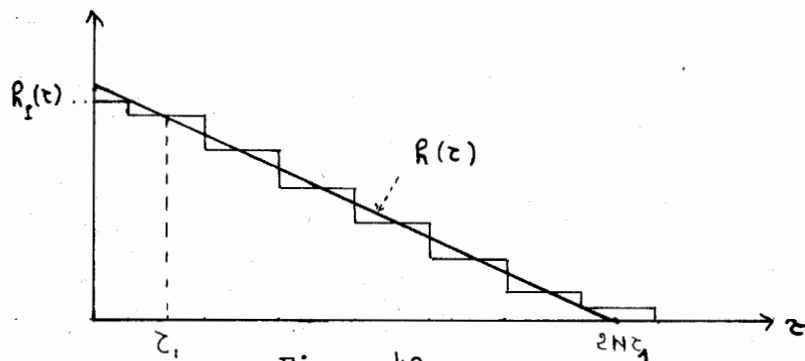
- Figure 39 -

$$(116) \quad S_\phi(f) = \int_0^{+\infty} R_{\phi, p.e.}(\tau) \cdot U_{\tau_1}(\tau) d\tau$$

La variance de Hadamard est donc une pseudo-transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation $R_\phi(\tau)$. Le terme $\cos(\omega_1 \tau)$ de la transformée de Fourier a été remplacé par une fonction de Walsh qui introduit naturellement la présence d'harmoniques impairs :

$$(117) \quad U_{\tau_1}(\tau) = \frac{4}{\pi} \left[\cos(\omega_1 \tau) - \frac{1}{3} \cos(3\omega_1 \tau) + \frac{1}{5} \cos(5\omega_1 \tau) \dots \right]$$

Nous allons expliciter maintenant le rôle de la pondération et de l'échantillonnage de la fonction $R_\phi(\tau)$. La pondération est représentée par une fonction $h_p(\tau)$. $h(\tau)$ est la fonction continue issue de $h_p(\tau)$.



- Figure 40 -

On introduit la fonction $h(\tau)$ dans la relation :

$$(118) \quad S_\phi(f) = \int_0^{+\infty} U(\tau) \cdot R(\tau) \cdot R_{\phi_e}(\tau) \cdot d\tau$$

$R_{\phi_e}(\tau)$ représente maintenant la fonction d'autocorrélation échantillonnée. La transformée de Fourier du produit $U(\tau) \cdot h(\tau)$ est égale au produit de convolution des transformées de Fourier de chaque fonction :

$$(119) \quad \text{T. F.} [U(\tau) \cdot R(\tau)] = \left\{ \left(\frac{4}{\pi} \sum_n \frac{1}{n} \delta(f-f_n) \right) \otimes 2N\tau \left(\frac{\sin 2\pi N\tau f}{2\pi N\tau f} \right)^2 \right\}$$

Le théorème de Parseval nous permet d'écrire :

$$(120) \quad S_\phi(f) = \frac{1}{8} \int_0^{+\infty} \frac{4}{\pi} \sum_n \underbrace{\frac{2N\tau}{n} \left(\frac{\sin 2\pi N\tau (f-f_n)}{2\pi N\tau (f-f_n)} \right)^2}_{\text{Filtre de largeur } \Delta f = \frac{1}{2N\tau}} S_{\phi_e}(f) \cdot df$$

La fonction de pondération $h(\tau)$ introduit donc une largeur de raie Δf ; on retrouve bien la relation $f = \frac{1}{2N\tau}$ avec $2N\tau = \Delta T$ (largeur de la fonction $h(\tau)$).

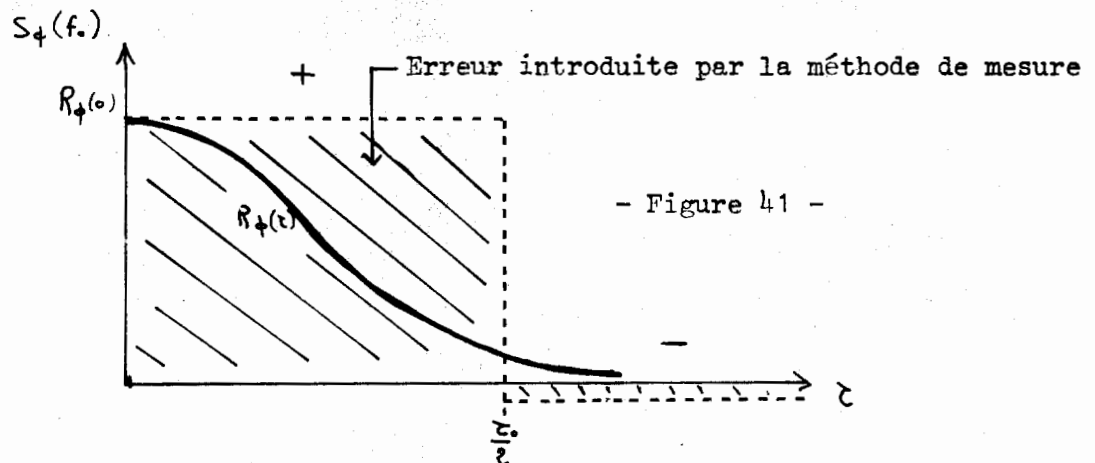
Nous avons montré que la variance de Hadamard était une pseudo-transformée de Fourier de $R_\phi(\tau)$: la fonction de Walsh $U(\tau)$ introduit un contenu harmonique, la fonction de pondération $h(\tau)$ impose une largeur de raie mais l'échantillonnage de l'autocorrélation n'apparaît pas dans la fonction de transfert établie au début de ce chapitre. Il est intéressant d'étudier les limitations inhérentes à cet échantillonnage.

II.3.3 - Limitation de la variance d'Hadamard en basse fréquence

La fonction d'autocorrélation d'un processus aléatoire stationnaire de moyenne nulle tend vers zéro lorsque τ augmente. Il existe donc une valeur τ_m telle que $R_\phi(\tau > \tau_m) \ll R_\phi(0)$; ainsi, pour des durées $\tau_0 > \tau_m$ la transformée de Fourier de $R_\phi(\tau)$ tend vers une limite. La variance de Hadamard détermine la densité spectrale $S_\phi(f)$ à partir d'une série alternée :

$$S_\phi(f) = 2 \left[\frac{\tau_0}{2} R_\phi(0) - \tau_0 R_\phi(\tau_0) + \tau_0 R_\phi(2\tau_0) - \dots \right]$$

Pour des durées τ_0 , telle que $\tau_0 > \tau_m$, la contribution des termes $R_\phi(p\tau_0)$ devient négligeable ; en première approximation $S_\phi(f_0)$ devient proportionnelle à τ_0 : $S_\phi(f_0) \approx R_\phi(0) \cdot \tau_0$ sachant que $\tau_0 = \frac{1}{2f}$, $S_\phi(f_0) = \frac{(R_\phi(0))}{2} \frac{1}{f}$. La densité spectrale déterminée par la variance de Hadamard tend vers une loi en $1/f$.



Cette méthode d'analyse spectrale par pseudo-transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation fait donc diverger les densités spectrales ainsi mesurées aux basses fréquences ($1/f$).

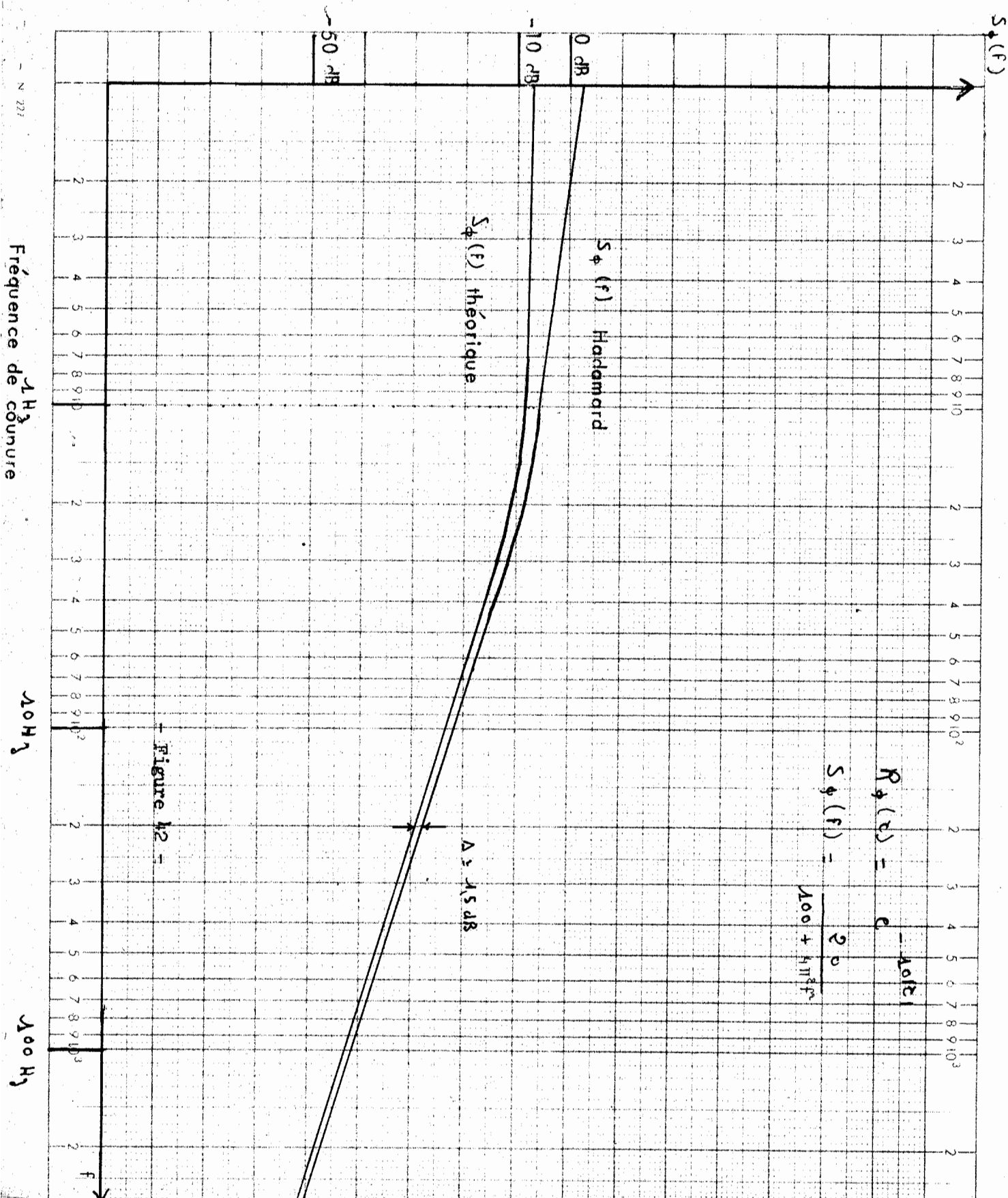
La fréquence minimale (f_m) d'analyse est déterminée par la largeur de la fonction d'autocorrélation et seule une connaissance de celle-ci permet de l'estimer.

Exemple : Considérons un bruit de phase possédant une densité spectrale lorentzienne :

$$\begin{cases} S_\phi(f) = \frac{20}{100 + 4\pi^2 f^2} \\ R_\phi(\tau) = e^{-10|\tau|} \end{cases}$$

Nous avons tracé la courbe théorique $S\phi(F)$, fig[42], puis en utilisant la relation [45] nous avons tracé $S\phi_H(F)$.

Nous pouvons constater qu'en dessous d'une fréquence de 1 Hz, $S\phi_H(F)$ diverge de $S\phi(F)$ et présente une loi en $\frac{1}{F}$ introduite par la méthode de mesure.



II-4 Conclusion

La variance de Hadamard permet d'effectuer l'analyse spectrale des fluctuations de fréquence d'un oscillateur dans une gamme de fréquences de Fourier inaccessible aux analyseurs de spectre B.F classiques Réf (13-30). Bien que ne disposant pas de l'équipement nécessaire à sa détermination expérimentale, nous avons jugé utile d'approfondir l'étude initiale (16) sur un plan théorique (17) . En particulier, nous avons montré clairement comment le processus de mesure temporel permettait d'effectuer une analyse spectrale par la réalisation d'une pseudo-transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation. Cette interprétation complète celle donnée par l'allure de la fonction de transfert dont nous avons calculé l'expression analytique exacte. Enfin, une limitation inhérente à la méthode de mesure a été mise en évidence, à savoir un changement de pente du spectre à mesurer en dessous d'une certaine fréquence.

x

CHAPITRE III

ESTIMATION DE L'INSTABILITE DANS LE DOMAINE TEMPS

PAR FILTRAGE DU BRUIT DE PHASE (VARIANCE PASSE-HAUT)

	pages
I - <u>MESURE DES VARIANCES PAR FILTRAGE DU BRUIT DE PHASE</u>	87
I.1 - Introduction.	87
I.2 - Schéma synoptique du processus de mesure.	88
I.3 - Caractère "passe-haut" de la variance d'Allan.	89
I.4 - Limitations des mesures : $\tau_{\min}$ - $\tau_{\max}$.	91
I.5 - Précision des mesures.	93
I.6 - Comparaison avec la méthode du comptage de fréquence.	99
II - <u>BANC DE MESURE</u>	101
II.1 - Schéma synoptique.	101
II.2 - Mélangeur d'entrée.	104
II.3 - Etude du bruit dans les transistors.	109
II.4 - Optimisation d'un préamplificateur faible bruit.	119
II.5 - Description du banc de mesure.	125
III - <u>REALISATION DES MESURES</u>	133
III.1 - Domaine temps.	133
III.2 - Domaine fréquence.	134

I - MESURE DES VARIANCES PAR FILTRAGE DU BRUIT DE PHASE

I.1 - Introduction

La mesure de l'instabilité de fréquence à court terme des générateurs ultra-stables est généralement effectuée dans le domaine temps par comptage de fréquence. Afin d'obtenir, à partir de ces mesures temporelles, des informations sur les densités spectrales des fluctuations de phase des oscillateurs, de nombreux auteurs ont étudié les relations entre le domaine temps et le domaine fréquence. Ces relations ont été rappelées dans le premier chapitre.

La variance de Hadamard a permis d'estimer la densité spectrale des fluctuations de phase à partir de mesures temporelles. Ainsi, l'instabilité à court terme d'un générateur pouvait être mesurée dans les deux domaines (temps et fréquence) à partir d'un comptage de fréquence.

La réduction du bruit dans les mélangeurs et les amplificateurs permet la démodulation des très faibles fluctuations de phase des oscillateurs : un filtrage sélectif basses fréquences permet alors d'en faire l'analyse spectrale (domaine fréquence).

Ce chapitre sera consacré à l'étude d'une méthode de filtrage du bruit de phase qui permet d'obtenir l'instabilité des générateurs dans le domaine temps.

I.2 - Schéma synoptique du processus de mesure

Les relations explicitant les variances d'échantillons dans le domaine temps et le domaine fréquence peuvent se résumer ainsi :

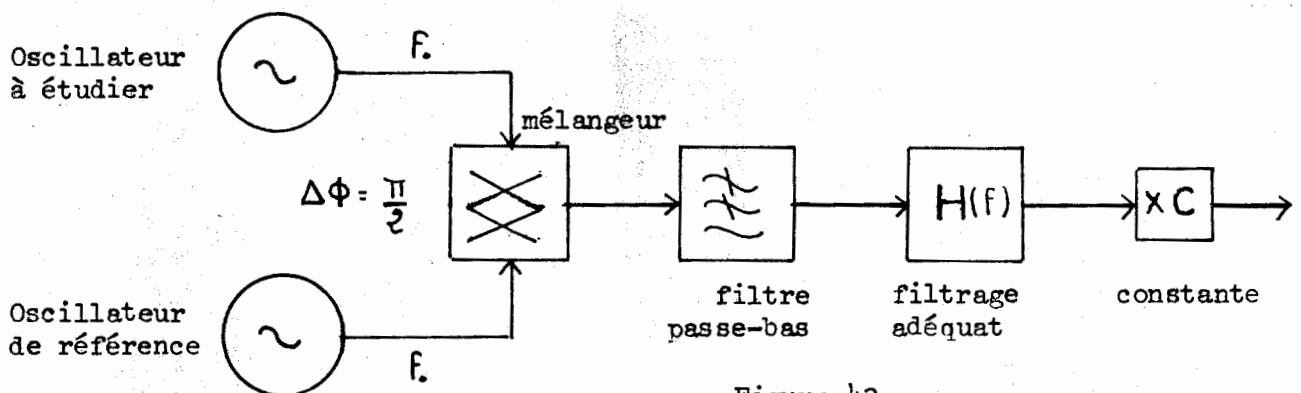
$$\langle \sigma_{\phi}^2(N, T, \tau) \rangle = \overline{[\phi(t) \otimes h(t)]^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\phi}(f) |H_{\phi}(f)|^2 df$$

Processus de mesure temporel $h(t)$ $\xleftrightarrow{T.F.}$ Fonction de transfert $H_{\phi}(f)$

La variance de Hadamard est basée sur un processus de mesure $h(t)$ ayant une fonction de transfert $H_{\phi}(f)$ très sélective, permettant d'estimer la densité spectrale $S_{\phi}(f)$. Nous allons suivre maintenant un raisonnement inverse : nous voulons déterminer un filtre dont la fonction de transfert $H_{\phi}(f)$ permet d'estimer, par filtrage du bruit de phase, une variance donnée :

$$(121) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\phi}(f) |H_{\phi}(f)|^2 df = \langle \sigma_{\phi}^2(N, T, \tau) \rangle$$

Expérimentalement, cette relation nous conduit au processus de mesure suivant (*) :



- Figure 43 -

La référence est supposée sans bruit. Le générateur à étudier délivre une tension : $v(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi(t))$, en quadrature avec le signal de référence. Le mélangeur d'entrée se comporte alors en détecteur de phase : $v_1(t) = K\phi(t)$. Après un filtrage adéquat et multiplication par une constante, le carré de la tension lue sur un voltmètre efficace vrai donne la variance considérée $\langle \sigma_{\phi}^2(N, T, \tau) \rangle$.

* En partant de la même équation, une autre méthode de filtrage a été développée au "Laboratoire de physique et métrologie des oscillateurs" de Besançon Réf (19).

Par exemple, la variance d'Allan généralement utilisée est donnée par la relation suivante :

$$\langle \sigma_y^2(2, \tau, \tau) \rangle = \frac{8}{\omega_0^2 \tau^2} \int_0^{+\infty} S_{\phi}(f) \sin^4(\pi \tau f) df$$

La fonction de transfert devra être :

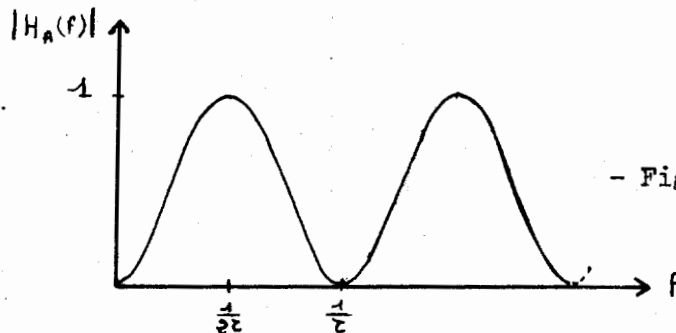
$$|H_A(f)| = \sin^2(\pi \tau f)$$

La constante multiplicative : $C = \frac{\sqrt{8}}{\omega_0 \tau}$

Cette méthode n'est pas limitée à la variance d'Allan ; pour mesurer une variance donnée, il suffit de pouvoir réaliser le filtre correspondant.

I.3 - Caractère "passe-haut" de la variance d'Allan

La fonction de transfert d'Allan est périodique :

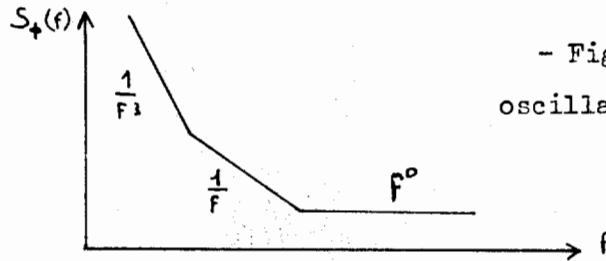


- Figure 44 -

La fonction $\sin^2 \pi \tau f$ n'étant pas réalisable aisément, on cherchera une fonction de transfert ayant certaines propriétés communes avec $\sin^2 \pi \tau f$. Pour que le nouveau paramètre introduit par la méthode de filtrage ($\sigma^2(\tau)$) soit un bon estimateur de la variance d'Allan, il doit avoir les deux propriétés suivantes :

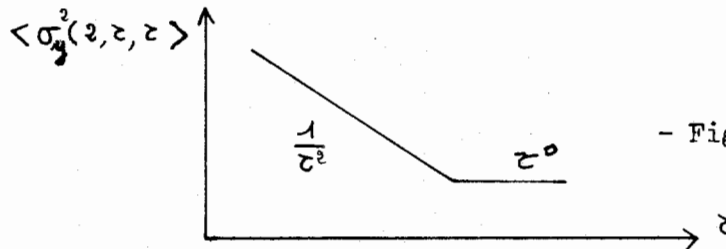
- même dépendance que $\langle \sigma_y^2(2, \tau, \tau) \rangle$ en fonction de τ et de f_H pour chaque type de bruit rencontré dans les oscillateurs.
- le biais, défini par $\frac{\langle \sigma(\tau) \rangle}{\langle \sigma_y^2(2, \tau, \tau) \rangle}$, doit être sensiblement le même pour tous les bruits analysés.

Comme première approche de cette fonction de transfert, nous remarquerons que les densités spectrales des fluctuations de phase sont des fonctions continues ne présentant pas de variations brusques (le processus $\phi(t)$ représente uniquement le bruit aléatoire). La densité spectrale, $S_\phi(f)$, d'oscillateurs à coefficient de qualité élevé, comporte deux changements de pente (voir chapitre IV).



- Figure 45 -
oscillateur à quartz

La variance d'Allan, mesurée sur un oscillateur perturbé par un tel bruit, comporte deux lois de variations :



- Figure 46 -

Il ne paraît donc pas fondamental de discriminer des bandes d'analyse espacées de $\frac{1}{\tau}$ comme la fonction de transfert $\sin^2 \pi \tau f$. Ceci ne serait pas justifié pour un spectre de raies. Une deuxième remarque importante est que la variance d'Allan tient peu compte des fluctuations basses fréquences (composantes de fréquence inférieure à $\frac{1}{\pi \tau}$). C'est pourquoi J. Rutman a proposé un filtrage passe-haut sur les fluctuations de phase comme estimateur de la variance d'Allan : (Réf (20))

$$\langle \sigma_{p.H}^2(\tau) \rangle = \frac{8}{\omega_0^2 \tau^2} \int_0^{+\infty} S_\phi(f) |H_{p.H}(f)|^2 df$$

La fréquence à 3 dB de la fonction $\sin^2 \pi \tau f$ détermine la fréquence de coupure du filtre passe-haut équivalent : $f_c = \frac{1}{\pi \tau}$.

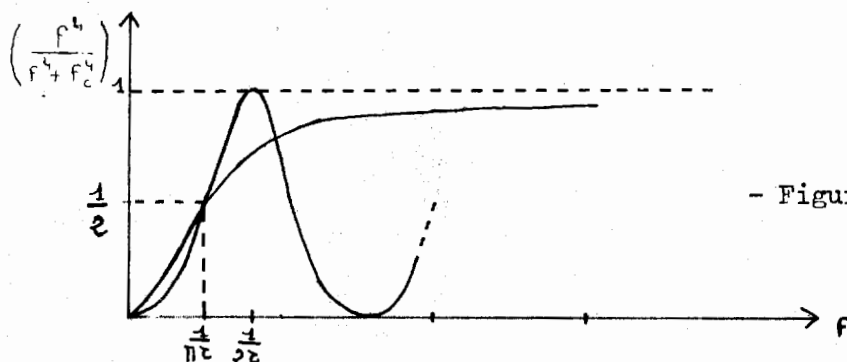
Nous avons reporté dans le tableau [X] les résultats obtenus avec un filtre passe-haut idéal. Cette nouvelle variance est un bon estimateur de $\langle \sigma_y^2(2, \tau, \tau) \rangle$:

a) la dépendance en fonction de τ et de f_H pour chaque type de bruit est la même pour $\langle \sigma_y^2(2, \tau, \tau) \rangle$ et $\langle \sigma_{p.H}^2(\tau) \rangle$.

b) le biais défini par $\frac{\langle \sigma_{PH}(\tau) \rangle}{\langle \alpha_j(2, \tau) \rangle}$, est toujours voisin de l'unité.

La variation en f^2 de la réponse d'un filtre du second ordre coïncidant mieux avec la pente à l'origine de la fonction $\sin^2 \pi f$, nous utiliserons un filtre Butterworth du second ordre pour la réalisation pratique du filtrage.

Le biais est ainsi sensiblement amélioré comme le montre le tableau [X].



- Figure 47 -

L'instabilité dans le domaine temps est donc caractéristique d'une puissance de bruit de phase mesurée en bande large : pour une durée τ_0 , elle dépend de la puissance du bruit de phase dans les composantes de fréquences supérieures à la fréquence de Fourier : $f_c = \frac{1}{\pi \tau_0}$. L'interprétation de la densité spectrale, $S_\phi(f)$, dans le domaine temps peut être très rapide. Nous étudierons ce problème dans le chapitre IV.

I.4 - Limitations des mesures : $\tau_{\min}$ - $\tau_{\max}$.

La variance d'Allan est fonction de la durée τ de chaque mesure de fréquence. Avec le processus de mesure par filtrage du bruit de phase, on fait correspondre à la durée τ une fréquence de coupure f_c telle que $f_c = \frac{1}{\pi \tau}$.

Les limitations du temps d'analyse, $\tau_{\min}$ et $\tau_{\max}$, vont dépendre des fréquences de coupure $f_{\max}$ et $f_{\min}$ du filtrage réalisable en pratique :

a) Quels que soient l'oscillateur de référence et l'oscillateur à étudier, il est nécessaire de les asservir pour les maintenir en quadrature afin de démoduler le bruit de phase. Nous verrons dans un prochain paragraphe que le bruit de phase est effectivement démodulé sans subir de modification au dessus de la fréquence de coupure f_A de la boucle d'asservissement. Ainsi, la durée de mesure $\tau_{\max}$ sera imposée par f_A :

$$\tau_{\max} = \frac{1}{\pi f_A}.$$

$S_p(f)$	$\sigma_y^2(z, z, z)$	$\sigma_{p,H}^2(z)$	$\sigma_{B2}^2(z)$	(σ_{B2}/σ_R)
K_0	$\frac{3 K_0 F_H}{4 \pi^2 V_0^2 z^2}$	$\frac{8 K_0 F_H}{4 \pi^2 V_0^2 z^2}$	$\frac{8 K_0 F_H}{4 \pi^2 V_0^2 z^2}$	$\sqrt{\frac{8}{3}} = 1,63$
K_1/F	$\frac{K_1}{4 \pi^2 V_0^2 z^2} [3,8 + 3 \ln(2\pi z f_0)]$	$\frac{8 K_1}{4 \pi^2 V_0^2 z^2} \cdot \ln(\pi z f_0)$	$\frac{2 K_1}{4 \pi^2 V_0^2 z^2} [\ln(1 + (\pi z f_0)^4)]$	$\sqrt{\frac{2 \ln(1 + (\pi z f_0)^4)}{3,8 + 3 \ln(2\pi z f_0)}} *$
K_2/F^2	$\frac{K_2}{2 V_0^2 z}$	$\frac{2 K_2}{\pi V_0^2 z}$	$\frac{K_2}{\sqrt{2} V_0^2 z}$	$\sqrt{\sqrt{2}} = 1,19$
K_3/F^3	$2 \ln 2 \cdot \frac{K_3}{V_0^2}$	$\frac{K_3}{V_0^2}$	$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{K_3}{V_0^2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{4 \ln 2}} = 1,06$
K_4/F^4	$\frac{2 \pi^2}{3} \cdot \frac{K_4 z}{V_0^2}$	$\frac{2 \pi}{3} \cdot \frac{K_4 z}{V_0^2}$	$\frac{\pi^2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{K_4 z}{V_0^2}$	$\sqrt{\frac{3}{2 \sqrt{2}}} = 1,03$

*

$\pi z f_0$	10	100	1000	10^4	∞
$\frac{\sigma_{B2}}{\sigma_R}$	1,20	1,37	1,44	1,48	$\sqrt{\frac{8}{3}}$

- Tableau [X] -

- b) La fréquence maximale $f_{\max}$ dépend de la bande passante f_H du banc de mesure qui est imposée, soit par le filtre passe-bas qui suit le comparateur, soit par la bande passante de l'amplificateur faible bruit ; on a alors :

$$(123) \quad \tau_{\min} \approx \frac{1}{\pi f_H}.$$

I.5 - Précision des mesures

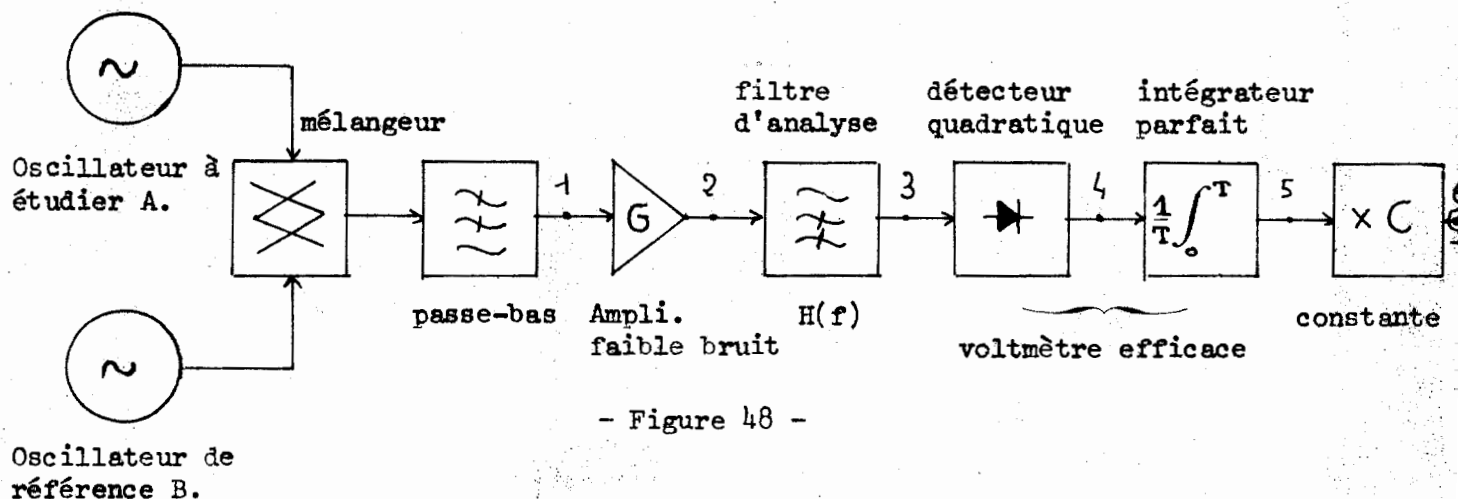
L'estimateur de la variance d'Allan, par comptage de fréquence, nécessite une statistique sur m couples de résultats. L'erreur aléatoire introduite par le nombre fini de mesures est caractérisée par l'écart type $\sigma[\sigma_j^2(2, \tau)]$ avec $j = 1, 2, \dots, m$ (voir le tableau VII du paragraphe V.2.5, chapitre I).

Si nous considérons m couples de mesures, la durée totale d'analyse est donnée par $T = 2m\tau$ (en considérant des mesures adjacentes). Les relations entre $\sigma[\sigma_j^2(2, \tau)]$, T et la nature du bruit sont reportées dans le tableau [XI] (colonne de droite) Réf (13).

De même, avec la méthode de mesure par filtrage du bruit de phase, il est intéressant de déterminer l'écart type des mesures en fonction de la durée totale d'analyse et de la nature du bruit. Cette étude permettra ainsi de comparer la précision des deux méthodes pour une durée totale de mesure donnée.

I.5.1 - Détermination de l'estimateur $\langle \sigma_{PH}(\tau) \rangle$

Le voltmètre efficace est représenté par un détecteur quadratique suivi d'un intégrateur parfait.



- Figure 48 -

Le bruit de phase de l'oscillateur (A) est démodulé par un comparateur de phase, puis amplifié :

$$\begin{aligned} V_1(t) &= K \phi(t) & S_{V_1}(f) &= K^2 S_{\phi}(f) \\ V_2(t) &= K G \phi(t) & S_{V_2}(f) &= (K G)^2 S_{\phi}(f) \end{aligned}$$

La tension issue de l'amplificateur est filtrée :

$$V_3(t) = K G \phi(f_c, t) \quad S_{V_3}(f) = (K G)^2 S_{\phi}(f) |H(f)|^2$$

On détecte quadratiquement puis on intègre cette tension pendant une durée totale T.

$$V_5(t) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} K_D V_3^2(t) dt$$

k_D : constante du détecteur quadratique exprimée en volt⁻¹.

Après multiplication par une constante adéquate, $\left(\frac{8}{\omega_c^2 \tau^2 (K G)^2 k_D}\right)$, le banc de mesure délivre une tension $v_6(t)$:

$$(124) \quad V_6(t, T) = \left(\frac{8}{\omega_c^2 \tau^2} \cdot \frac{1}{(K G)^2 k_D}\right) \cdot \left[\frac{1}{T} \int_t^{t+T} K_D V_3^2(t) dt \right]$$

Cette valeur est un estimateur de la variance passe-haut :

$$(125) \quad \langle \sigma_{PH}^2(\tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} V_6(t, T) = \lim_{T \rightarrow \infty} \hat{\sigma}_{PH}^2(\tau, T) = \frac{8}{\omega_c^2 \tau^2} \int_0^{+\infty} S_{\phi}(f) |H(f)|^2 df$$

Nous allons étudier la précision de cet estimateur.

I.5.2 - Erreur aléatoire $\sigma(\delta)$ introduite par la durée finie des mesures

Pour une durée totale de mesure T, la variance passe-haut est une variable aléatoire :

$$(126) \quad \hat{\sigma}_{PH}^2(T, \tau) = \left(\frac{8}{\omega_c^2 \tau^2} \cdot \frac{1}{(K G)^2}\right) \cdot \left[\frac{1}{T} \int_t^{t+T} V_3^2(t) dt \right]$$

avec :

$$S_{V_3}(f) = (K G)^2 S_{\phi}(f) |H(f)|^2$$

$\hat{\sigma}_{p,h}^2(T, \tau)$ est un estimateur sans biais en ce sens que :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \hat{\sigma}_{p,h}^2(T, \tau) = \langle \sigma_{p,h}^2(\tau) \rangle$$

Si nous réalisons N mesures, les valeurs $(\hat{\sigma}_{p,h}^2(T, \tau))_N$ seront réparties autour de la valeur moyenne $\langle \sigma_{p,h}^2(\tau) \rangle$ avec une dispersion caractérisée par la variance de cette variable aléatoire :

$$(127) \quad \sigma^2[\hat{\sigma}_{p,h}^2(T, \tau)] = \left(\frac{8}{\omega_0^2 \tau^2} \cdot \frac{1}{(KG)^2} \right)^2 \cdot \sigma^2[\langle V_3^2(t) \rangle_T]$$

La relation (52) du paragraphe (I.VII.4) nous permet d'écrire :

$$\sigma^2[\hat{\sigma}_{p,h}^2(T, \tau)] = \left(\frac{8}{\omega_0^2 \tau^2} \cdot \frac{1}{(KG)^2} \right)^2 \int_0^{+\infty} [S_{v_3}(f) \otimes S_{v_3}(f)] \cdot \left(\frac{\sin^2 \pi T f}{\pi T f} \right)^2 df$$

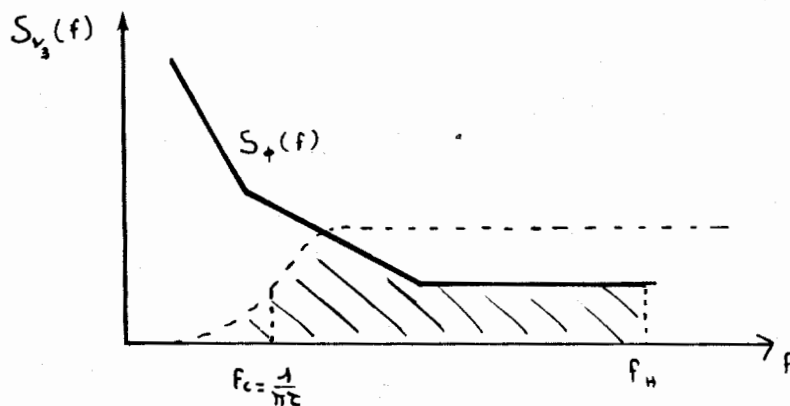
L'erreur relative sur la mesure du paramètre $\langle \sigma_{p,h}^2(\tau) \rangle$ sera notée $\sigma^2(\xi)$.

$$(128) \quad \sigma^2(\xi) = \frac{\sigma[\hat{\sigma}_{p,h}^2(T, \tau)]}{\langle \sigma_{p,h}^2(\tau) \rangle} = \frac{1}{\sqrt{T}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\int_0^{+\infty} [S_{v_3}(f) \otimes S_{v_3}(f)] \cdot \left(\frac{\sin^2 \pi T f}{\pi T f} \right)^2 df}}{\int_0^{+\infty} S_{v_3}(f) df}$$

Expérimentalement, on s'intéresse à l'écart type $\langle \sigma_{p,h}(\tau) \rangle$; nous déterminerons donc l'erreur relative $\sigma(\delta)$ sur la mesure de $\langle \sigma_{p,h}(\tau) \rangle$. On montre facilement que $\sigma(\delta) = \frac{1}{2} \sigma(\xi)$.

I.5.3 -- Détermination de $\sigma(\delta)$ en fonction du type de bruit

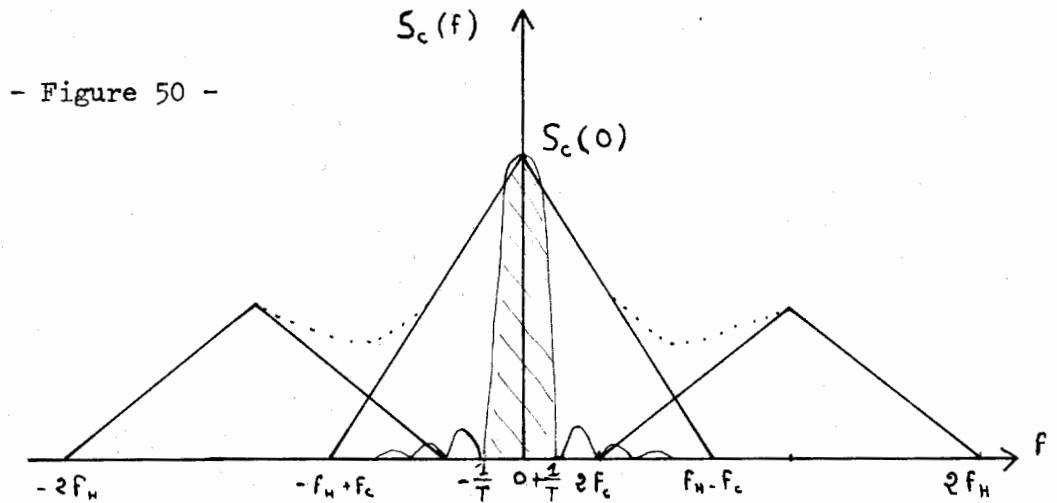
Le signal $v_3(t)$ étant issu du filtre passe-haut, sa densité spectrale est bornée sur l'intervalle : $[f_c = \frac{1}{\pi \tau}, f_H]$.



- Figure 49 -

La convolution de ce spectre par lui-même possède un maximum pour $f = 0$.

$$S_c(0) = \left[S_{v_3}(f) \otimes S_{v_3}(f) \right]_{f=0} = \int_0^{+\infty} S_{v_3}^2(f) df$$



L'erreur aléatoire fait intervenir la partie basse fréquence de ce spectre dans une bande passante B inversement proportionnelle au temps de mesure. Pour simplifier le calcul de l'erreur aléatoire $\sigma(\delta)$, nous considérons la densité spectrale $S_c(f)$ constante et égale à $S_c(0)$ dans la bande passante B , cette simplification ne peut être justifiée que si T est suffisamment grand :

$$(129) \quad \sigma(\delta) = \frac{1}{2\sqrt{T}} \cdot \frac{\sqrt{\int_0^{+\infty} S_{v_3}^2(f) df}}{\int_0^{+\infty} S_{v_3}(f) df}$$

Le biais défini par $\frac{\hat{\sigma}(\delta)}{\sigma(\delta)}$ est toujours sensiblement supérieur à l'unité. La densité spectrale $S_{v_3}(f)$ est bornée sur l'intervalle $[f_c, f_H]$:

$$S_{v_3}(f) = (KG)^2 |H(f)|^2 S_\phi(f)$$

$$S_{v_3}(f) \begin{cases} = (KG)^2 S_\phi(f) & \text{pour } f_c \leq f \leq f_H \\ = 0 & \text{pour } f \notin [f_c, f_H] \end{cases}$$

Nous utiliserons ainsi la relation approchée suivante pour estimer l'erreur aléatoire :

$$(130) \quad \sigma(\delta) = \frac{1}{2\sqrt{T}} \cdot \frac{\sqrt{\int_{f_c}^{f_H} S_\phi^2(f) df}}{\int_{f_c}^{f_H} S_\phi(f) df}$$

Bruit blanc de phase : $S_{\phi}(f) = K_0$

$$(131) \quad \sqrt{\int_{F_c}^{F_H} K_0 df} = K_0 \sqrt{F_H - F_c} \quad \int_{F_c}^{F_H} K_0 df = K_0 (F_H - F_c)$$

$$\sigma(\delta) = \frac{1}{2\sqrt{T}} \cdot \frac{1}{\sqrt{F_H - F_c}} \quad \text{si } F_H \gg F_c \quad \boxed{\sigma(\delta) = \frac{1}{2\sqrt{T} F}}$$

Bruit flicker de phase : $S_{\phi}(f) = K_1 F^{-1}$

$$(132) \quad \sqrt{\int_{F_c}^{F_H} K_1 F^{-1} df} = K_1 (F_c^{-1} - F_H^{-1})^{\frac{1}{2}} \quad \int_{F_c}^{F_H} K_1 F^{-1} df = K_1 [\ln F_H - \ln F_c]$$

$$\sigma(\delta) = \frac{1}{2\sqrt{T}} \cdot \frac{\sqrt{F_c^{-1} - F_H^{-1}}}{(\ln F_H - \ln F_c)} \quad \text{si } F_H \gg F_c \quad \boxed{\sigma(\delta) = \frac{\sqrt{\pi}}{2 \ln(\pi \sqrt{2} F_H)} \sqrt{\frac{\tau}{T}}}$$

Bruit blanc de fréquence : $S_{\phi}(f) = K_2 F^{-2}$

$$(133) \quad \sqrt{\int_{F_c}^{F_H} K_2 F^{-2} df} = \frac{K_2}{3} (F_c^{-1} - F_H^{-1})^{\frac{1}{2}} \quad \int_{F_c}^{F_H} K_2 F^{-2} df = K_2 (F_c^{-1} - F_H^{-1})$$

$$\sigma(\delta) = \frac{1}{2\sqrt{T}} \cdot \frac{\sqrt{F_c^{-1} - F_H^{-1}}}{\sqrt{3} (F_c^{-1} - F_H^{-1})} \quad \text{si } F_H \gg F_c \quad \boxed{\sigma(\delta) = 0,51 \sqrt{\frac{\tau}{T}}}$$

Bruit flicker de fréquence : $S_{\phi}(f) = K_3 F^{-3}$

$$(134) \quad \sqrt{\int_{F_c}^{F_H} K_3 F^{-3} df} = \frac{K_3}{\sqrt{5}} (F_c^{-2} - F_H^{-2})^{\frac{1}{2}} \quad \int_{F_c}^{F_H} K_3 F^{-3} df = \frac{K_3}{2} (F_c^{-2} - F_H^{-2})$$

$$\sigma(\delta) = \frac{1}{\sqrt{T}} \cdot \frac{\sqrt{F_c^{-2} - F_H^{-2}}}{(F_c^{-2} - F_H^{-2})} \quad \text{si } F_H \gg F_c \quad \boxed{\sigma(\delta) = 0,79 \sqrt{\frac{\tau}{T}}}$$

"Random Walk" de fréquence : $S_{\phi}(f) = K_4 F^{-4}$

$$(135) \quad \sqrt{\int_{F_c}^{F_H} K_4 F^{-4} df} = \frac{K_4}{\sqrt{7}} (F_c^{-3} - F_H^{-3})^{\frac{1}{2}} \quad \int_{F_c}^{F_H} K_4 F^{-4} df = \frac{K_4}{3} (F_c^{-3} - F_H^{-3})$$

$$\sigma(\delta) = \frac{1}{2\sqrt{T}} \cdot \frac{3 \sqrt{F_c^{-3} - F_H^{-3}}}{\sqrt{7} (F_c^{-3} - F_H^{-3})} \quad \text{si } F_H \gg F_c \quad \boxed{\sigma(\delta) = \sqrt{\frac{\tau}{T}}}$$

Nous avons reporté dans le tableau [XI] les valeurs de $\sigma(\delta)$ et de $\sigma(\Delta m)$ (écart type des mesures avec la méthode du comptage dans laquelle la durée de mesure T est donnée par la relation : $T = 2m\tau$).

$S_{\phi}(F)$	$\sigma(\delta)$	$\sigma[\Delta m]$
K_0	$\frac{1}{2\sqrt{T} F}$	$0,99\sqrt{\frac{\tau}{T}}$
K_1/F	$\frac{\pi}{2 \text{Ln}(\pi \tau F_m)} \sqrt{\frac{\tau}{T}}$	$0,99\sqrt{\frac{\tau}{T}}$
K_2/F^2	$0,51\sqrt{\frac{\tau}{T}}$	$0,87\sqrt{\frac{\tau}{T}}$
K_3/F^3	$0,79\sqrt{\frac{\tau}{T}}$	$1,19\sqrt{\frac{\tau}{T}}$
K_4/F^4	$\sqrt{\frac{\tau}{T}}$	$0,75\sqrt{\frac{\tau}{T}}$

*

$\pi \tau F_m$	10	10^2	10^3
$\frac{\sqrt{\pi}}{2 \text{Ln}(\pi \tau F_m)}$	0,385	0,192	0,128

- Tableau [XI] -

I.6 - Comparaison avec la méthode du comptage de fréquence

D'après le tableau [XI], nous pouvons remarquer que le mérite relatif de chaque méthode dépend du type de bruit considéré :

- a) Pour le bruit blanc de phase, les deux lois sont différentes : l'une dépend de Tf_H , l'autre de τ/T .

Pour les générateurs ultra-stables, le bruit blanc de phase prédomine au dessus de quelques centaines de Hertz, donc pour des temps de mesure proches de 10^{-3} s. Si nous considérons une bande passante $f_H = 10^4$ Hz, on obtient :

τ	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}
$\sigma(\delta)$	$\frac{5 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{T}}$	$\frac{5 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{T}}$	$\frac{5 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{T}}$
$\sigma[\Delta_m]$	$\frac{9,9 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{T}}$	$\frac{3,13 \cdot 10^{-2}}{\sqrt{T}}$	$\frac{9,9 \cdot 10^{-2}}{\sqrt{T}}$
$\frac{\sigma[\Delta_m]}{\sigma(\delta)}$	1,98	6,28	19,8

- Tableau [XII] -

Si l'on mesure la stabilité avec $\tau = 10$ ms d'un oscillateur perturbé par un bruit blanc de phase, dans la bande passante $f_H = 10^4$ Hz, il faudra, pour obtenir une précision donnée, 20 fois plus de temps avec la méthode par comptage. Pour ce type de bruit, le mérite relatif de la variance passe-haut est très important.

- b) Bruit flicker de phase.

Les deux lois diffèrent légèrement, l'erreur aléatoire de la variance passe-haut dépend de la bande passante f_H (voir le tableau [XI]).

Les erreurs aléatoires $\sigma(\delta)$ et $\sigma(\Delta_m)$ ont été reportées dans le tableau [XIII], pour $f_H = 10^4$ Hz et $\tau = 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}$ s.

τ	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}
$\sigma(\delta)$	$0,257 \sqrt{\frac{\tau}{T}}$	$0,154 \sqrt{\frac{\tau}{T}}$	$0,11 \sqrt{\frac{\tau}{T}}$
$\sigma[\Delta m]$	$0,99 \sqrt{\frac{\tau}{T}}$	$0,99 \sqrt{\frac{\tau}{T}}$	$0,99 \sqrt{\frac{\tau}{T}}$
$\frac{\sigma[\Delta m]}{\sigma(\delta)}$	3,85	6,42	9

- Tableau [XIII] -

En se situant dans un domaine ($f_H - \tau$) réaliste pour des générateurs ultra-stables, on constate que le mérite relatif de la variance passe-haut est encore important.

c) $S_\phi(f) = k_2 f^{-2}, k_3 f^{-3}, k_4 f^{-4}$.

Les lois de variation sont identiques avec un biais voisin de l'unité favorable à la variance passe-haut sauf pour le bruit en $k_4 f^{-4}$.

$S_\phi(f)$	$K_2 F^{-2}$	$K_3 F^{-3}$	$K_4 F^{-4}$
$\frac{\sigma[\Delta m]}{\sigma(\delta)}$	1,7	1,5	0,75

- Tableau [XIV] -

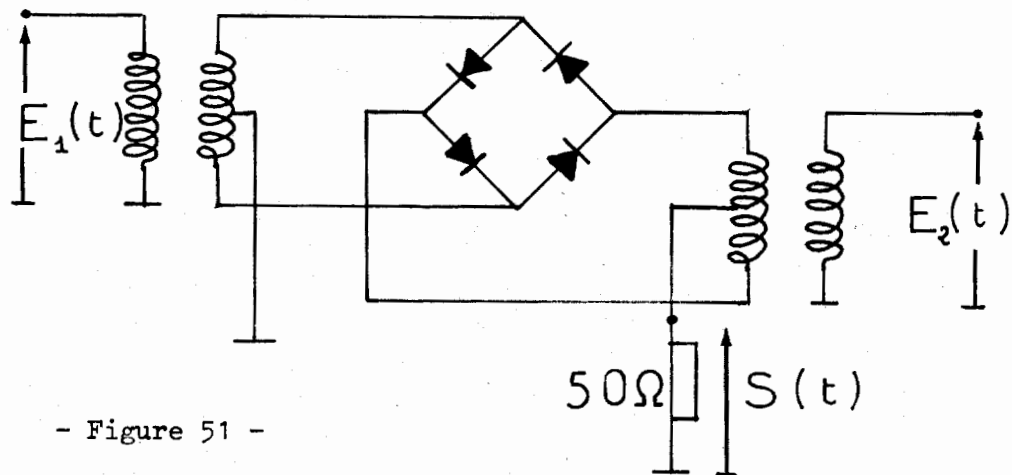
II - BANC DE MESURE

II.1 - Schéma synoptique

Le schéma synoptique du banc de mesure présenté au paragraphe (I.1) comporte les éléments suivants : (Réf (21))

- a) Un mélangeur équilibré qui constitue un détecteur de phase lorsqu'il reçoit deux signaux de même fréquence placés en quadrature.

$$E_1(t) = A_1 \cos(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}) \quad E_2(t) = A_2 \cos(\omega_0 t + \phi(t))$$



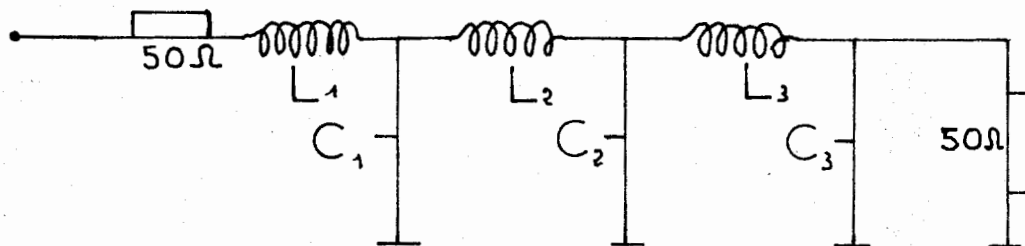
- Figure 51 -

(136)

$$S(t) = \delta E_1(t) E_2(t) = \frac{\delta A_1 A_2}{2} \left[\cos(\phi(t) - \frac{\pi}{2}) + \cos(2\omega_0 t + \frac{\pi}{2} + \phi(t)) \right]$$

$$S(t) = \frac{\delta A_1 A_2}{2} \left[\phi(t) + \cos(2\omega_0 t + \frac{\pi}{2} - \phi(t)) \right]$$

- b) Un filtre passe-bas Butterworth qui élimine la fréquence $2\omega_0$.

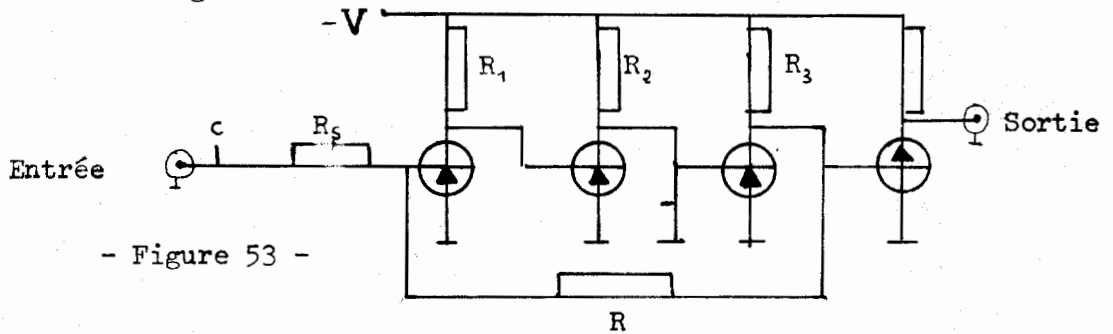


- Figure 52 -

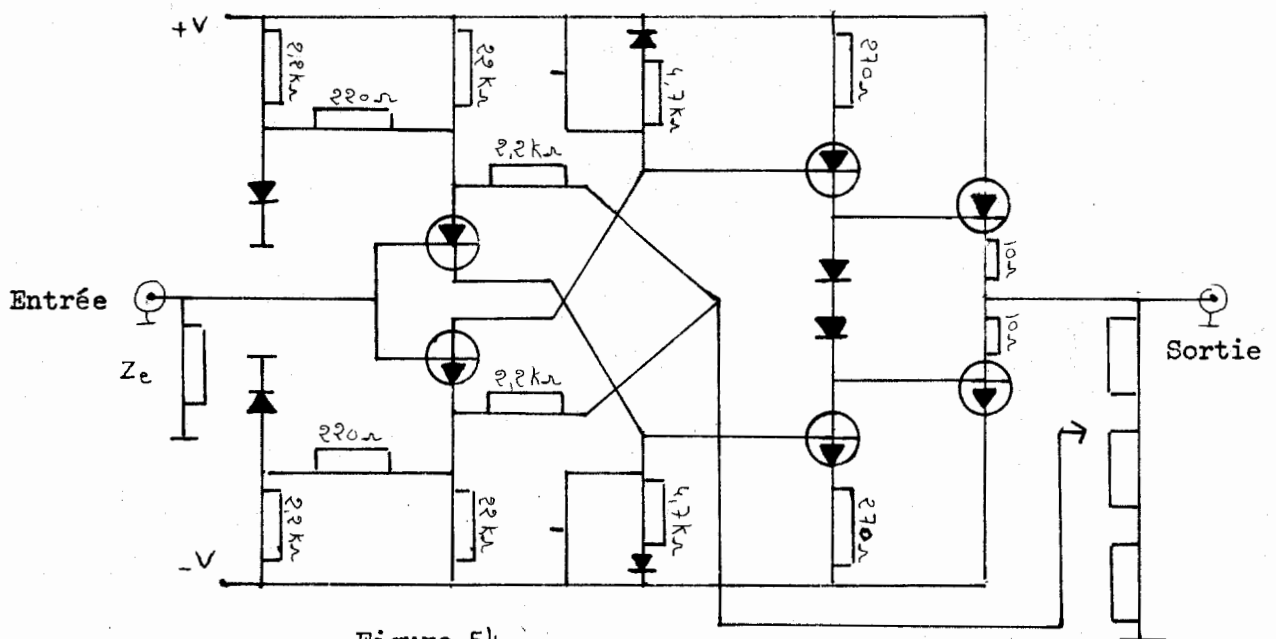
$$\begin{cases} L_1 = 40 \mu\text{H} & C_1 = 18,3 \text{ nF} \\ L_2 = 40 \mu\text{H} & C_2 = 12,2 \text{ nF} \\ L_3 = 20 \mu\text{H} & C_3 = 2,7 \text{ nF} \end{cases}$$

F_c (fréquence de coupure à 3 dB) = 300 kHz.

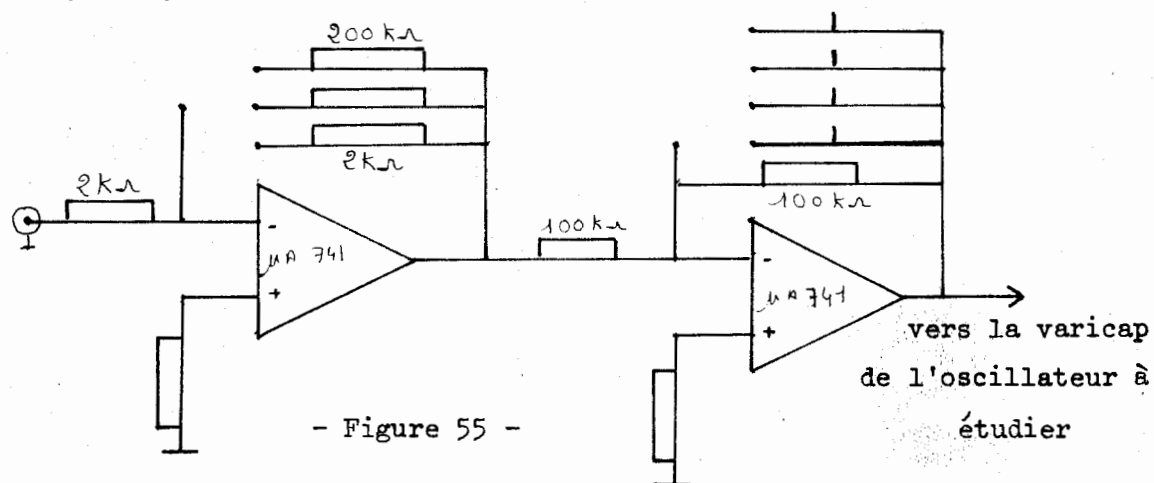
c) Un préamplificateur faible bruit (G1) dont le schéma est représenté sur la figure 53.



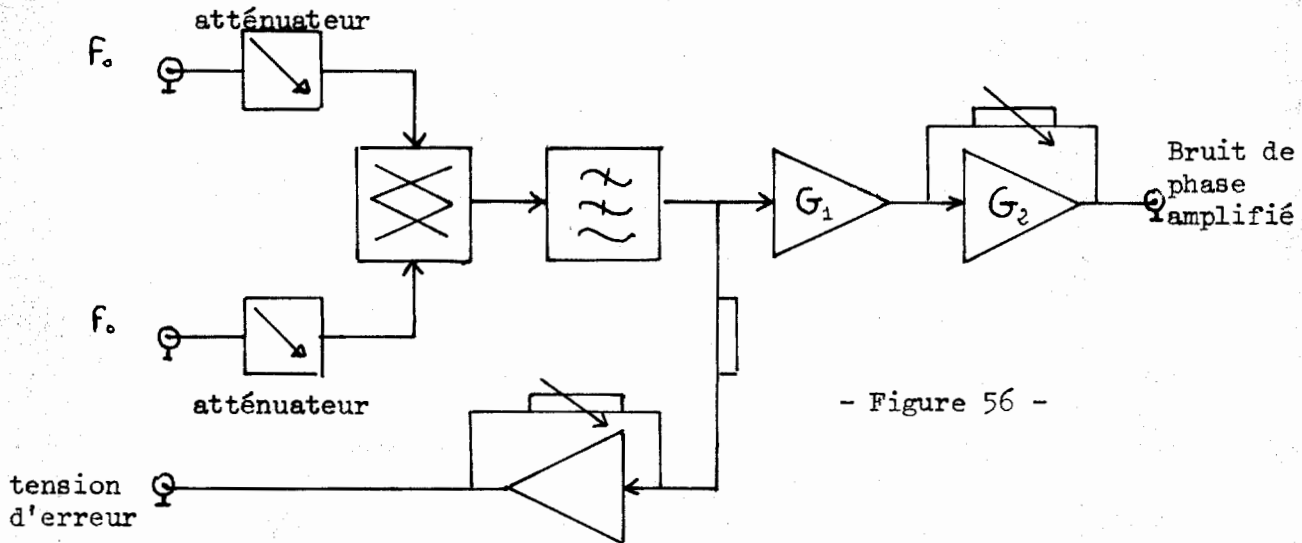
d) un amplificateur à gain variable représenté sur la figure 54 :



e) La tension d'erreur issue du détecteur de phase est amplifiée et intégrée, avant d'être appliquée sur l'élément de commande (varicap) de l'oscillateur de référence. La boucle d'asservissement possède 3 valeurs de gain (1 - 10 - 100) et 4 valeurs de constantes de temps (0 - 0,2 - 0,5 - 2 s)



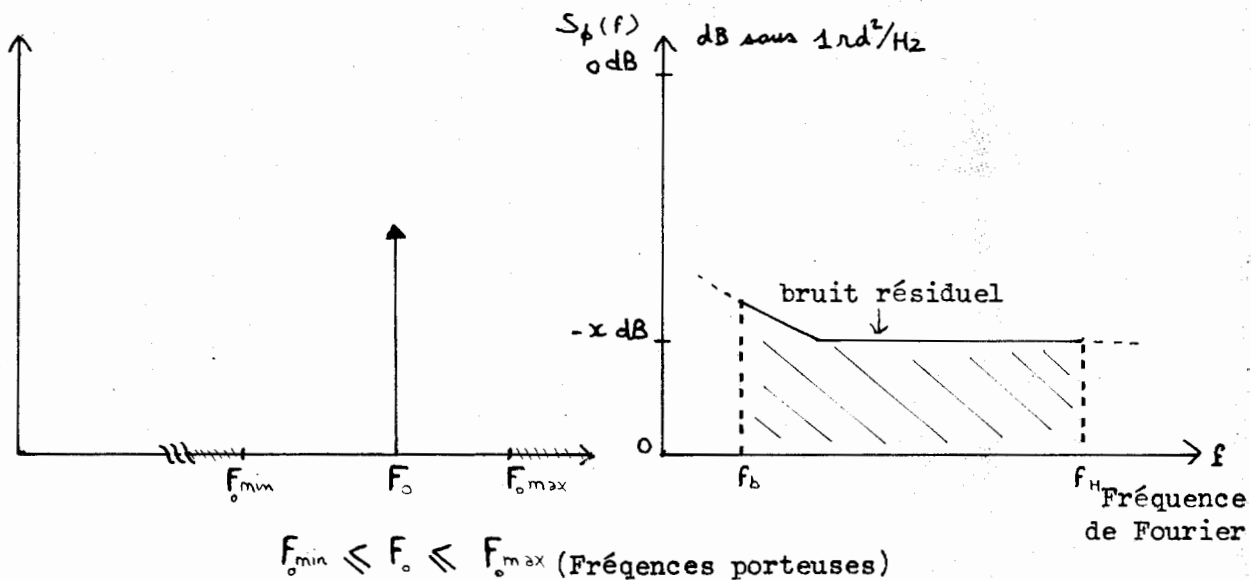
Le banc de mesure comporte deux entrées recevant les signaux de l'oscillateur de référence et de l'oscillateur à étudier, et deux sorties délivrant : les fluctuations de phase amplifiées et la tension d'erreur pour l'asservissement. Les atténuateurs d'entrée servent à régler le niveau d'attaque du mélangeur. Réf (22)



- Figure 56 -

Les performances de ce banc dépendent principalement du mélangeur et du préamplificateur. Trois paramètres permettent de les caractériser (Fig. 57).

- La gamme des fréquences porteuses F_o analysables ($F_{o\min} - F_{o\max}$).
- L'intervalle de fréquence analysable dans le domaine des fréquences de Fourier ($f_b - f_H$).
- Le niveau de bruit résiduel.



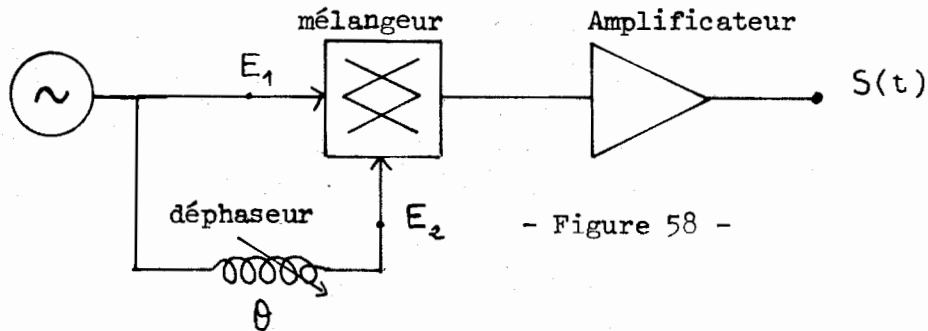
- Figure 57 -

II.2 - Mélangeur d'entrée

Le mélangeur impose le domaine de fréquences porteuses F_0 analysables ($F_{min} - F_{max}$). Le mélangeur utilisé (HP 10514 A) couvre une bande large (0,2 à 500 MHz). Nous indiquerons dans le chapitre IV des méthodes de mesure utilisables en hyperfréquence. Seuls les mélangeurs à diodes Schottky ont un bruit suffisamment faible pour permettre l'analyse des oscillateurs ultra-stables. Réf (23).

L'interprétation du bruit de sortie du mélangeur demande beaucoup de précautions. Si deux sources de même fréquence attaquent en quadrature les deux voies du mélangeur, celui-ci démodule les fluctuations de phase des deux sources.

Considérons maintenant le cas où une seule source est utilisée :



$$\begin{cases} E_1 = (A_1 + a_1(t)) \cdot \cos(\omega_0 t + \phi_1(t)) \\ E_2 = (A_2 + a_2(t)) \cdot \cos(\omega_0 t + \phi_2(t) + \theta) \end{cases}$$

$m(t)$: bruit du mélangeur et de l'amplificateur.

$$S(t) = \frac{\gamma}{2} A_1 A_2 + \frac{\gamma}{2} (A_1 a_2(t) + A_2 a_1(t)) \cdot \cos(\phi_1(t) - \phi_2(t) + \theta) + m(t)$$

• Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$(137) \quad S(t) = \frac{\gamma}{2} A_1 A_2 [\phi_1(t) - \phi_2(t)] + m(t) \simeq m(t) \text{ si les fluctuations } \phi_1(t) \text{ et } \phi_2(t) \text{ restent corrélées}$$

• Pour $\theta = 0$

$$(138) \quad S(t) = \frac{\gamma}{2} A_1 A_2 + \frac{\gamma}{2} [A_1 a_2(t) + A_2 a_1(t)] + m(t)$$

si $A_1 = A_2 = A$ $S(t) = \frac{\gamma A^2}{2} + \gamma A a(t) + m(t)$

Une source unique permet ainsi, soit de mesurer le bruit résiduel du mélangeur (et de l'amplificateur), soit de mesurer son propre bruit d'amplitude lorsque $m(t) \ll \gamma A a(t)$.

Les différentes composantes du signal $s(t)$ sont représentées sur la figure 59. La courbe (a) suit la loi : $\frac{\gamma A^2}{2} \cos \theta$. La source utilisée est un synthétiseur modulé en amplitude par un signal périodique $v(t)$; la courbe (b) représente le terme $\gamma A v(t) \cos \theta$. La modulation étant supprimée, nous mesurons le bruit d'amplitude et le bruit résiduel : $\gamma A a(t) \cos \theta + m(t)$. Courbe (c).

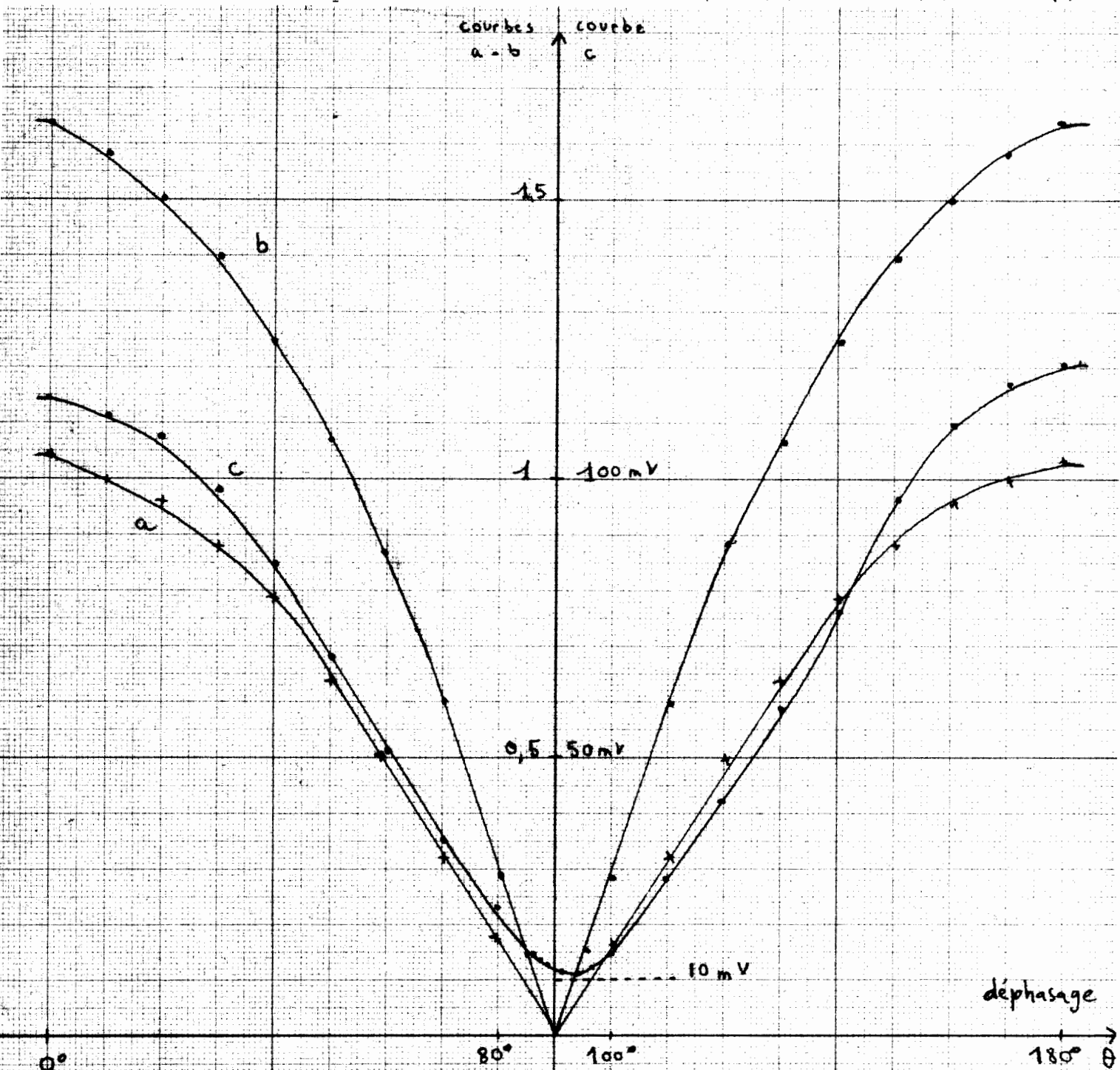
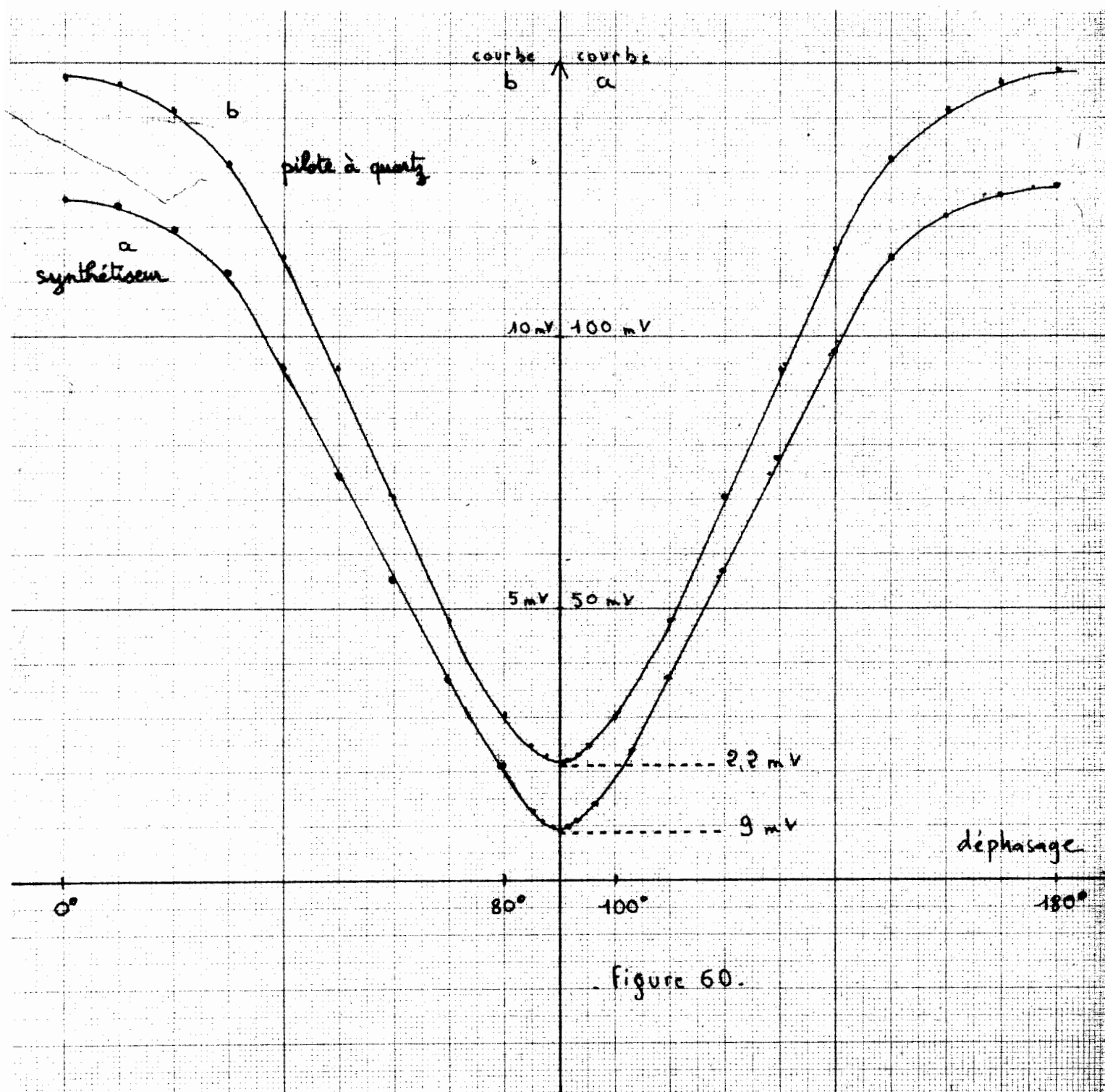
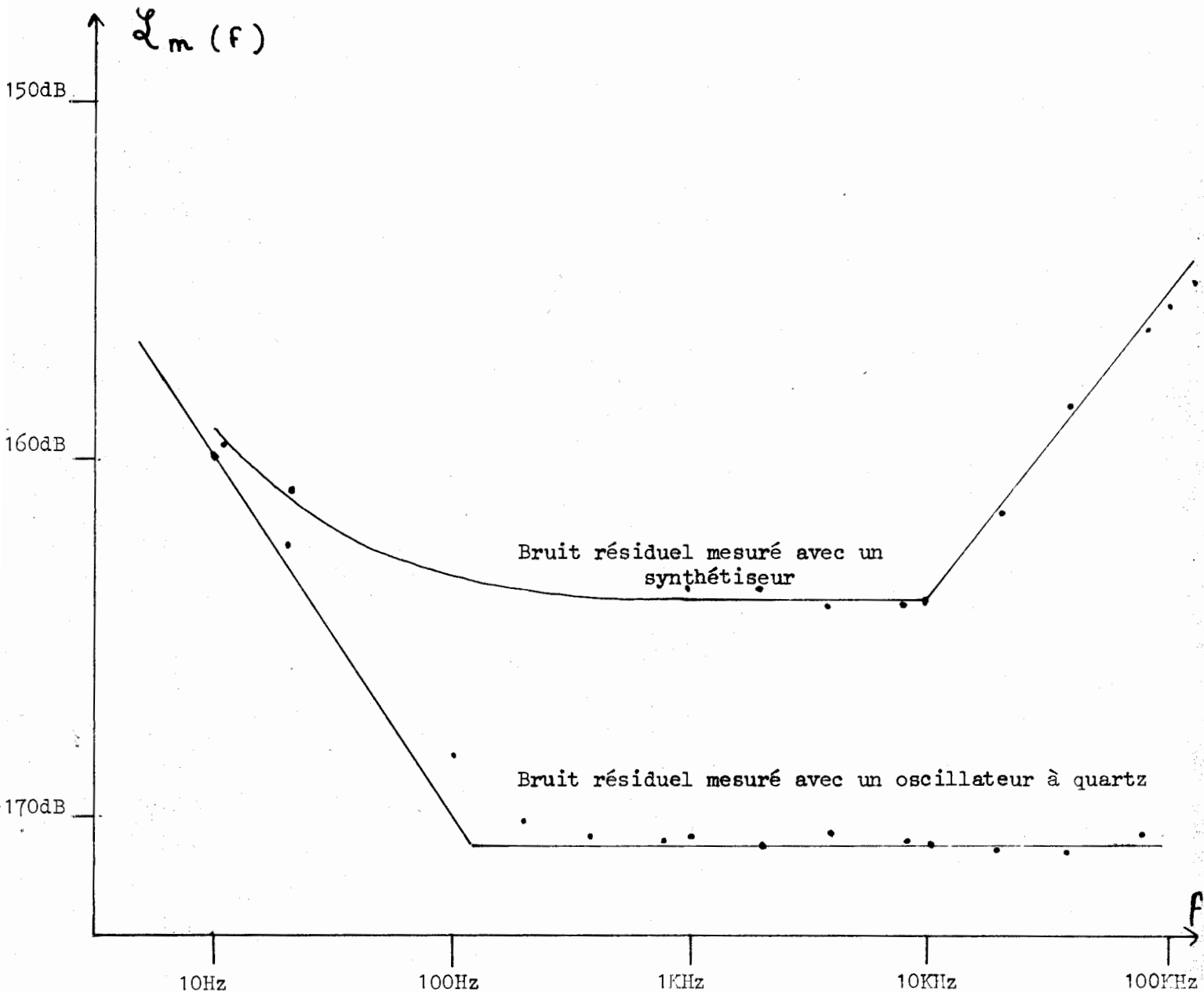


Figure 59

L'analyse spectrale du bruit résiduel $m(t)$ révèle un spectre particulier qui croît avec la fréquence pour $f \geq 10\text{KHz}$. (figure 61).

L'utilisation d'une source ultra-stable permet de mesurer un bruit d'amplitude plus faible, ce qui est normal, mais donne aussi une valeur plus faible pour $m(t)$: cette nouvelle valeur correspondant au bruit de l'amplification. La densité spectrale de $m(t)$ comporte deux types de bruit : blanc et "flicker". (figure 61).





- Figure 61 -

La comparaison des deux spectres de la figure (61) montre que ceux-ci s'écartent lorsque la fréquence de Fourier croît. Le bruit résiduel mesuré avec un synthétiseur correspond au bruit de phase faiblement décorrélé ($\phi_1(t) - \phi_2(t) \neq 0$) pour lequel la corrélation diminue aux fréquences élevées.

Il est donc nécessaire d'utiliser une source ultra-stable telle qu'un oscillateur à quartz pour mesurer le bruit résiduel $m(t)$.

La figure (62) représente l'influence de la distorsion de la source sur le bruit de sortie du mélangeur. Il y a déformation des lois précédentes, le minimum se trouvant à 100° .

Un déphasage de 90° fournirait une valeur pessimiste. Nous remarquons aussi que le niveau du bruit d'amplitude diminue quand le niveau d'attaque de la source augmente (courbes b et c).

Considérons l'expression : $\left\{ \frac{\gamma}{2} A_1 A_2 + \frac{\gamma}{2} [A_1 a_2(t) + A_2 a_1(t)] \right\} \cos \theta$

Pour A_1 et $A_2 \gg A_s$: il y a saturation. Le terme $\frac{\gamma A_1 A_2}{2}$ tend vers un maximum, mais sachant qu'il y a diminution du bruit d'amplitude, les termes $a_2(t)$ et $a_1(t)$ doivent décroître, ce qui est logique car pour A_1 et $A_2 \gg A_s$: la sortie dépend très peu de ΔA_1 et ΔA_2 .

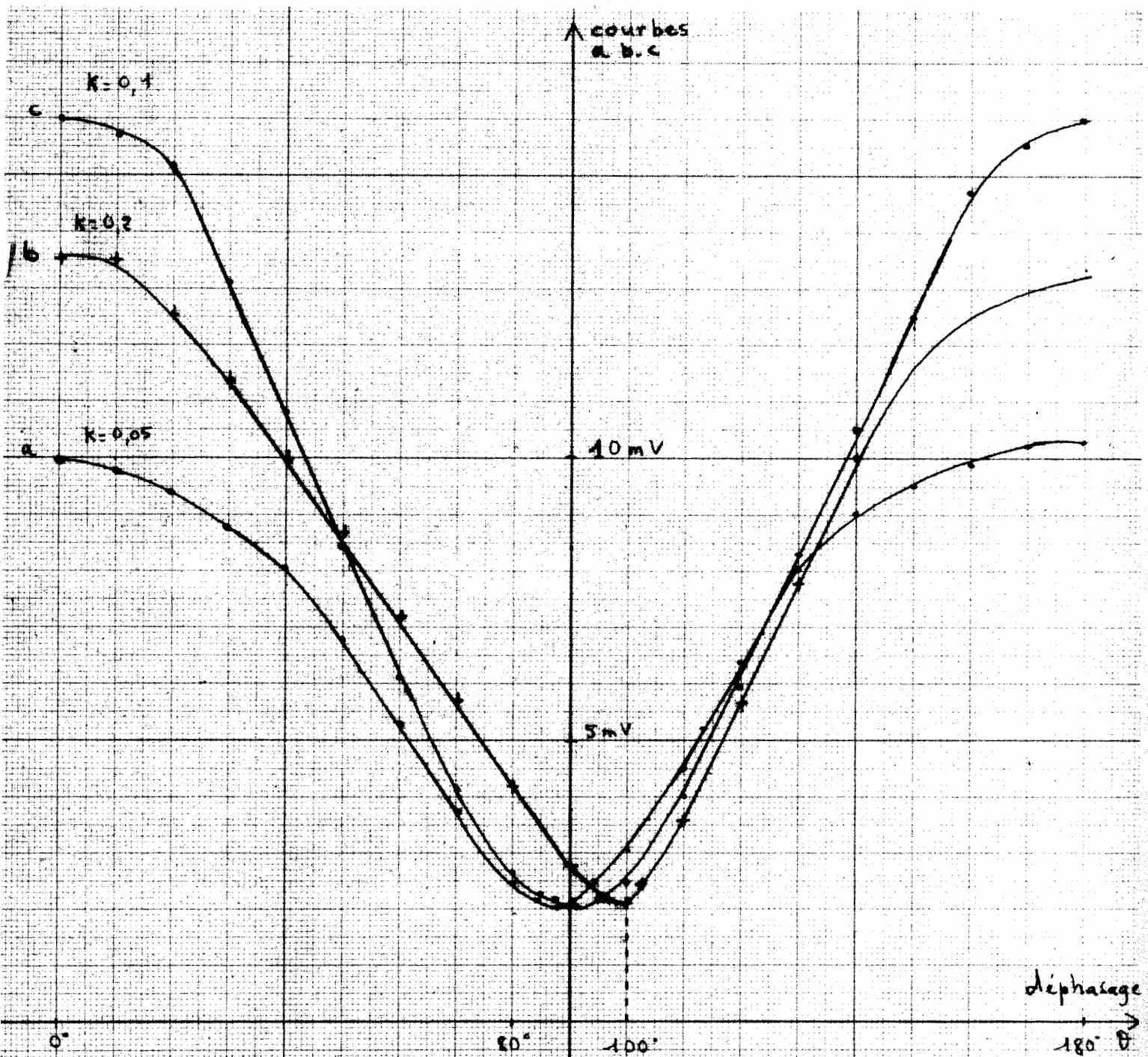


Figure 62

Pour mesurer le bruit d'amplitude, il faut donc utiliser des signaux en phase et se situer dans une zone linéaire pour les deux voies. Avec des niveaux identiques, le calcul se simplifie :

$$\frac{\delta A_1 A_2}{2} = \frac{\delta A^2}{2} = K_\phi$$

$$\frac{\delta}{2} [A_1 a_1(t) + A_2 a_2(t)] = \delta A a(t)$$

$$\delta A a(t) = \frac{2 K_\phi a(t)}{A} = K_a a(t)$$

(139)

$$K_a = \frac{2 K_\phi}{A}$$

Exemple :

$$\begin{cases} K_\phi = 0,057 \\ A = 0,77 \end{cases}$$

$$G. \left[\overline{x'^2(t, 100 \text{ kHz})} \right]^{\frac{1}{2}} = 15 \text{ mV}$$

...> Gain de l'amplificateur

$$\begin{cases} K'_\phi = 0,0275 \\ A' = 0,57 \end{cases}$$

$$G. \left[\overline{x'^2(t, 100 \text{ kHz})} \right]^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{K'_\phi A}{K A'} \right) \cdot 15 \text{ mV}$$

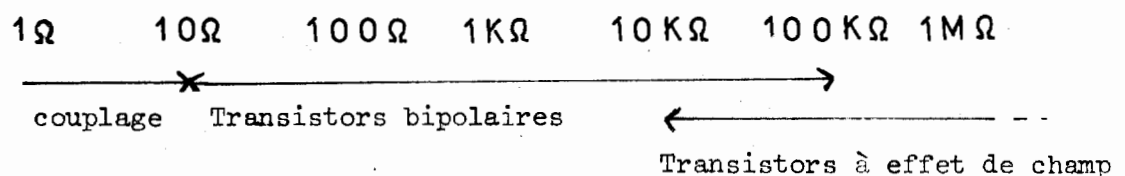
$$G. \left[\overline{x'^2(t, 100 \text{ kHz})} \right]^{\frac{1}{2}} = 98 \text{ mV}$$

valeur mesurée: 10 mV

II.3 - Etude du bruit dans les transistors

II.3.1 - Introduction

La caractéristique essentielle de l'amplificateur est son bruit propre qui contribue directement au bruit résiduel total du banc de mesure. Le choix du schéma n'étant pas fondamental, nous ferons seulement une distinction entre l'utilisation des transistors bipolaires et des transistors à effet de champ. Il est admis que les premiers conviennent mieux pour l'emploi de résistances de source de faible valeur. La référence (24) donne le tableau suivant :



- Tableau [XV] -

Le bruit de l'amplificateur dépendant de la résistance de source, nous montrerons dans les prochains paragraphes que celle-ci doit être faible. L'emploi d'un transformateur n'a pas été retenu pour des raisons évidentes de bande passante.

Avant d'étudier l'optimisation du préamplificateur, nous allons revenir sur les modèles de bruit dans les transistors (le bruit dans les résistances et les capacités étant traité en annexe). Le but de cette étude n'est pas de traiter de manière exhaustive le bruit dans les transistors, mais de faire une synthèse des principales lois fondamentales. Bien que cette synthèse ne conduise qu'à un modèle simplifié, elle nous permettra d'établir et de comprendre la démarche nécessaire à l'optimisation d'un amplificateur faible bruit.

II.3.2 - Bruit dans les transistors

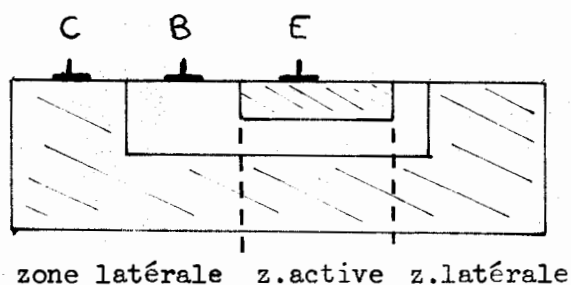
Dans un semiconducteur, les fluctuations du nombre de porteurs sont liées aux processus suivants :

- conduction sous l'effet d'un champ électrique ;
- diffusion sous l'effet des gradients de population ;
- génération et recombinaison des porteurs.

Les fluctuations aléatoires du nombre de porteurs constituent des sources de bruit qui représentent le bruit ultime du semiconducteur. En basse fréquence, les bruits en excès jouent un rôle important, ceux-ci dépendent de la qualité des surfaces, de la pureté du semiconducteur, etc... Ces différentes sources de bruit sont rappelées en annexe (f). Réf (25)

II.3.2.1 - Schéma équivalent d'un transistor

Les sources de bruit présentées dans l'annexe (f) permettent d'interpréter le comportement en bruit d'un transistor. Pour estimer l'influence de chaque source (grenaille, scintillation, thermique...), il faut connaître la géométrie des jonctions émetteur-base et base-collecteur. La figure 63 représente la coupe transversale d'un transistor obtenu par diffusion.



- Figure 63 -

Il faut distinguer deux zones :

a) La zone active à effet transistor, où le bruit de grenaille (shot noise) des courants émetteurs et collecteur (I_c , I_e) est prépondérant. On introduit ainsi deux sources de courant de bruit : i_{es}^2 et i_{cs}^2 (e : émetteur, s : shot, c : collecteur) ayant pour densité spectrale :

$$(140) \quad \begin{cases} S_{es}(f) = 2q(I_e + 2I_{e\text{ inverse}}) \simeq 2qI_e \\ S_{cs}(f) = 2qI_e \end{cases}$$

Les courants inverses sont négligeables devant I_e .

Ces deux sources ont le bruit de grenaille du courant émetteur en commun, elles sont donc corrélées : (Réf (26))

$$(141) \quad S_{\frac{I_e}{I_e}}(f) = 2qI_e$$

Le bruit en excès de la zone active comporte principalement le bruit de scintillation localisé à la jonction émetteur-base.

Nous négligeons la partie réelle de l'admittance émetteur.

b) Les zones latérales : la résistance de base, répartie entre le contact ohmique B et la zone active B', introduit un bruit thermique :

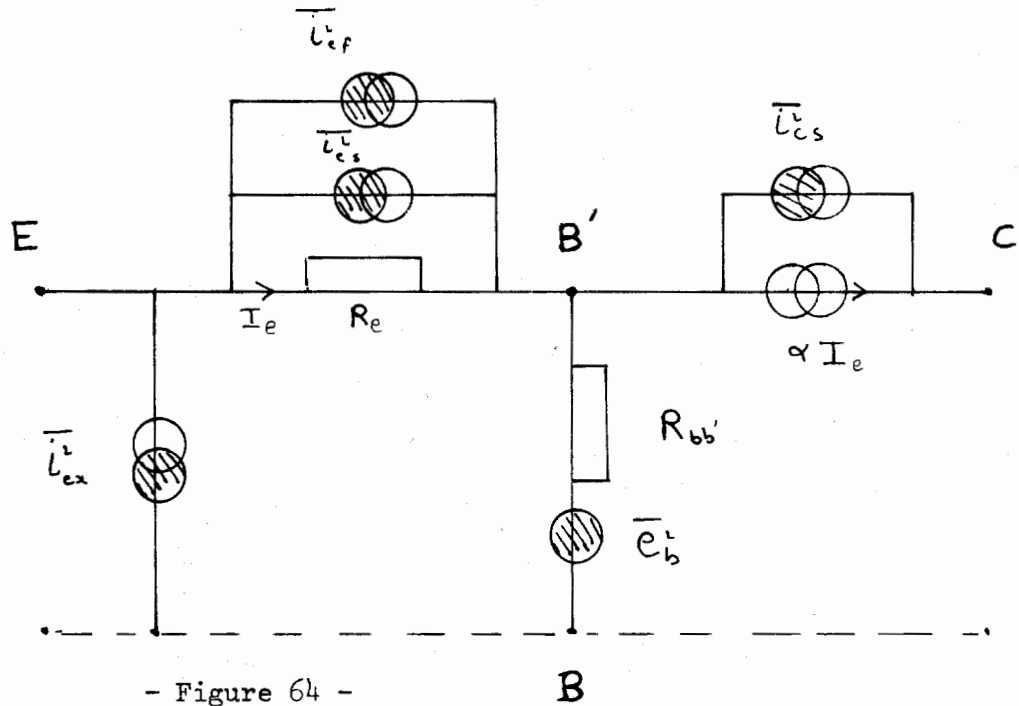
$$S_{R_{bb}}(f) = 4KT R_{bb}$$

La détermination de R_{bb} , nécessite la connaissance de la géométrie de la base et du niveau d'injection des porteurs.

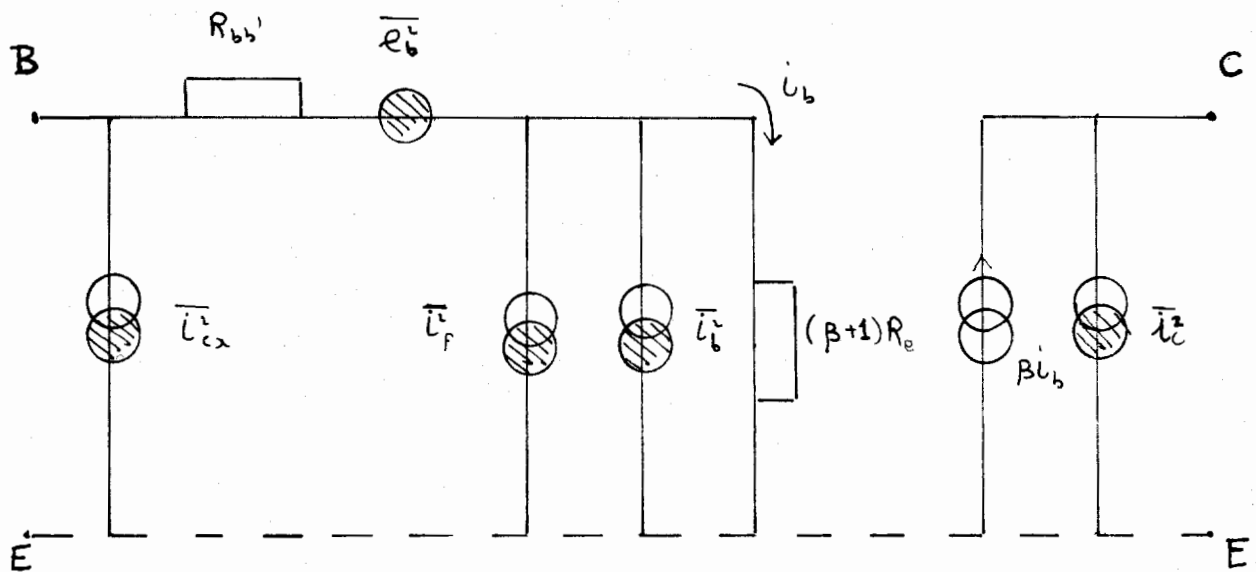
Les bruits en excès dans cette zone sont importants, ils sont localisés à la jonction émetteur-base : nous introduirons une source de courant i_{ex}^2 , comportant un terme de bruit de scintillation et un terme de bruit en créneaux*. La position de cette source, sur le schéma équivalent, est difficile à définir par rapport à la résistance R_{bb} . Les bruits en excès prenant naissance surtout en surface (près du contact ohmique B), nous placerons i_{ex}^2 entre B et E. Les transistors seront choisis avec un gain en courant (β) élevé : les travaux de nombreux auteurs (Réf. (25-32)) ayant montrés que le niveau du bruit flicker était ainsi plus faible.

Les transistors utilisés seront du type pnp car il est admis qu'ils présentent un niveau de bruit flicker inférieur, comparativement au type npn l'écart pouvant atteindre 20 dB, Réf (32).

* Le terme de bruit "pop corn" ne sera pas explicité dans la suite des calculs. Nous indiquons seulement ici la position de cette source de bruit dans le schéma équivalent du transistor



Pour une utilisation en émetteur commun, le schéma équivalent précédent doit être adapté aux paramètres de ce montage. En annexe (G), nous montrons les transformations permettant d'obtenir le schéma émetteur commun suivant :



Les sources de bruit sont indépendantes :

$$(142) \quad \begin{cases} S_{i_b}(f) = 2q I_b \\ S_{i_c}(f) = 2q I_c \end{cases}$$

On vérifie expérimentalement que les bruits flicker $\overline{i_f^2}$ et $\overline{i_{ex}^2}$ dépendent des courants de base (d'après la référence (27)).

$$(143) \quad \begin{cases} S_{i_f}(f) = \frac{K_1 I_b^\alpha}{f} & 0,5 \leq \alpha \leq 1 \\ S_{i_{ex}}(f) = \frac{K_2 I_c^\gamma}{f} & 1 \leq \gamma \leq 2 \end{cases}$$

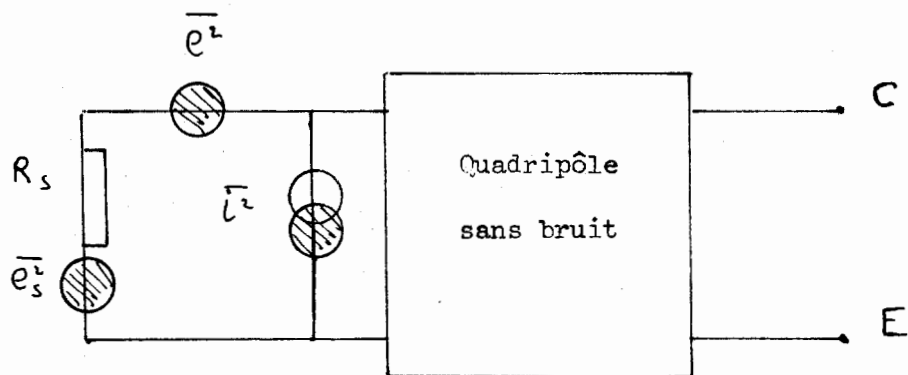
Le transistor étant considéré comme un quadripôle, son bruit peut être représenté par deux sources indépendantes situées à l'entrée et la sortie de ce quadripôle.

Exemple : deux sources de tension si le quadripôle est représenté par une matrice impédance.

deux sources de courant si c'est une matrice admittance.

Nous préférons utiliser une représentation mixte, permettant de localiser le bruit à l'entrée du quadripôle, bien que l'on introduise ainsi une corrélation entre les deux sources.

Le quadripôle est chargé par une impédance R_s dont le bruit thermique est représenté par : $\overline{e_s^2}$: $S_{e_s}(f) = 4kTR_s$



- Figure 66 -

II.3.2.2 - Introduction de $\overline{e^2}$ et $\overline{i^2}$

Evaluons le courant de bruit de sortie du schéma (65) :

$$(144) \quad \overline{i_s^2} = \overline{i_c^2} + g^2 \left[\frac{(\overline{e_b^2} + \overline{e_s^2})(\beta R_e)^2}{(R_s + R_{bb'} + \beta R_e)^2} + \frac{(\overline{i_b^2} + \overline{i_f^2})(\beta R)^2 (R_s + R_{bb'})^2 + \overline{i_{cc}^2} R_s^2 (\beta R_e + R_{bb'})^2}{(R_s + R_{bb'} + \beta R_e)^2} \right]$$

Nous rappelons que $\overline{i_s^2}$ est un modèle basses fréquences, pour lesquelles α et β sont constants. Nous indiquerons la modification de ce modèle pour des fréquences plus élevées.

Si la résistance de source est nulle, le courant de bruit $\overline{i_s^2}$ résulte de l'amplification de la tension $\overline{e^2}$:

$$\overline{e^2} = \overline{i_s^2} (R_s = 0) \cdot \left[\frac{\beta R_e + R_{bb'}}{g \beta R_e} \right]^2$$

$$\overline{e^2} = \overline{e_b^2} + (\overline{i_b^2} + \overline{i_f^2}) R_{bb'}^2 + \overline{i_c^2} \left[\frac{\beta R_e + R_{bb'}}{g \beta R_e} \right]^2$$

$$R_{bb'} \ll \beta R_e :$$

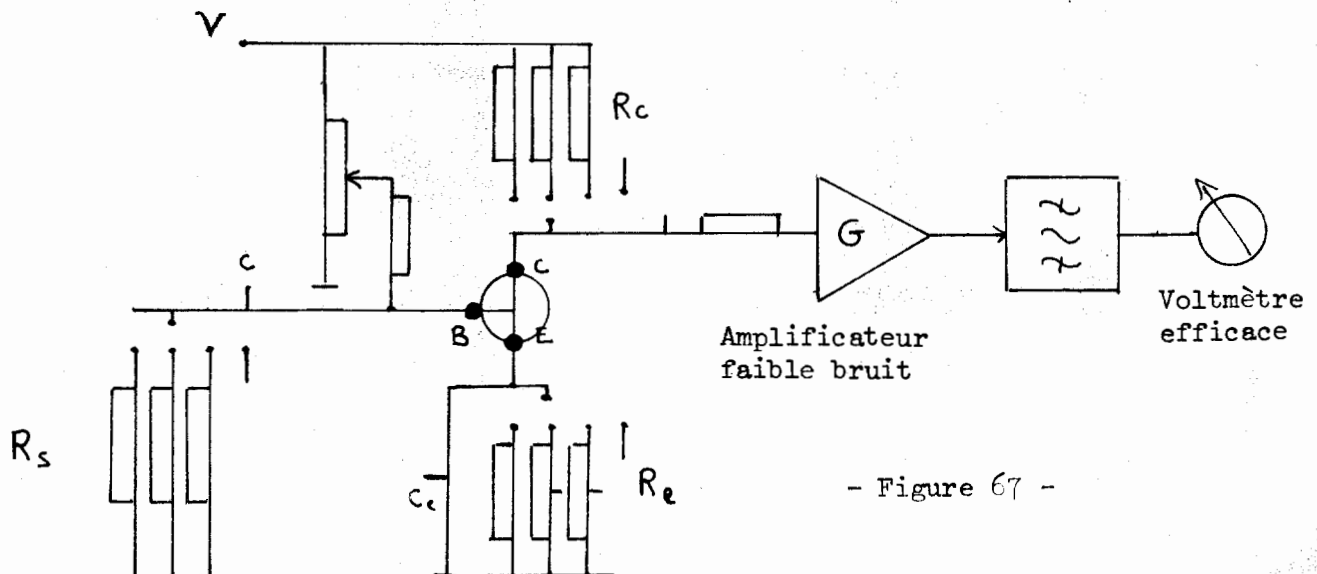
$$\overline{e^2} = \overline{e_b^2} + \frac{\overline{i_c^2}}{g^2} + \overline{i_f^2} R_{bb'}^2$$

$$(145) \quad S_e(f) = 4 k T (R_{bb'} + \frac{R_e}{2}) + \frac{k_1 I_b^2 R_{bb'}}{f}$$

Le bruit blanc de la tension $\overline{e^2}$ comporte deux termes : le bruit thermique de la résistance $R_{bb'}$, et le bruit de grenaille du courant I_e . A fort courant, $R_e = \frac{KT}{qI_e} \ll R_{bb'}$, la tension $\overline{e^2}$ ne dépend pas de I_e . A faible courant, $S_e(f) = e \frac{4(KT)}{qI_e}$ soit $S_e(f) \propto \frac{1}{I_e}$. (Voir la courbe expérimentale fig 68

BC 154: $R_{bb'} = 200 \Omega$, 2N4125: $R_{bb'} = 76 \Omega$).

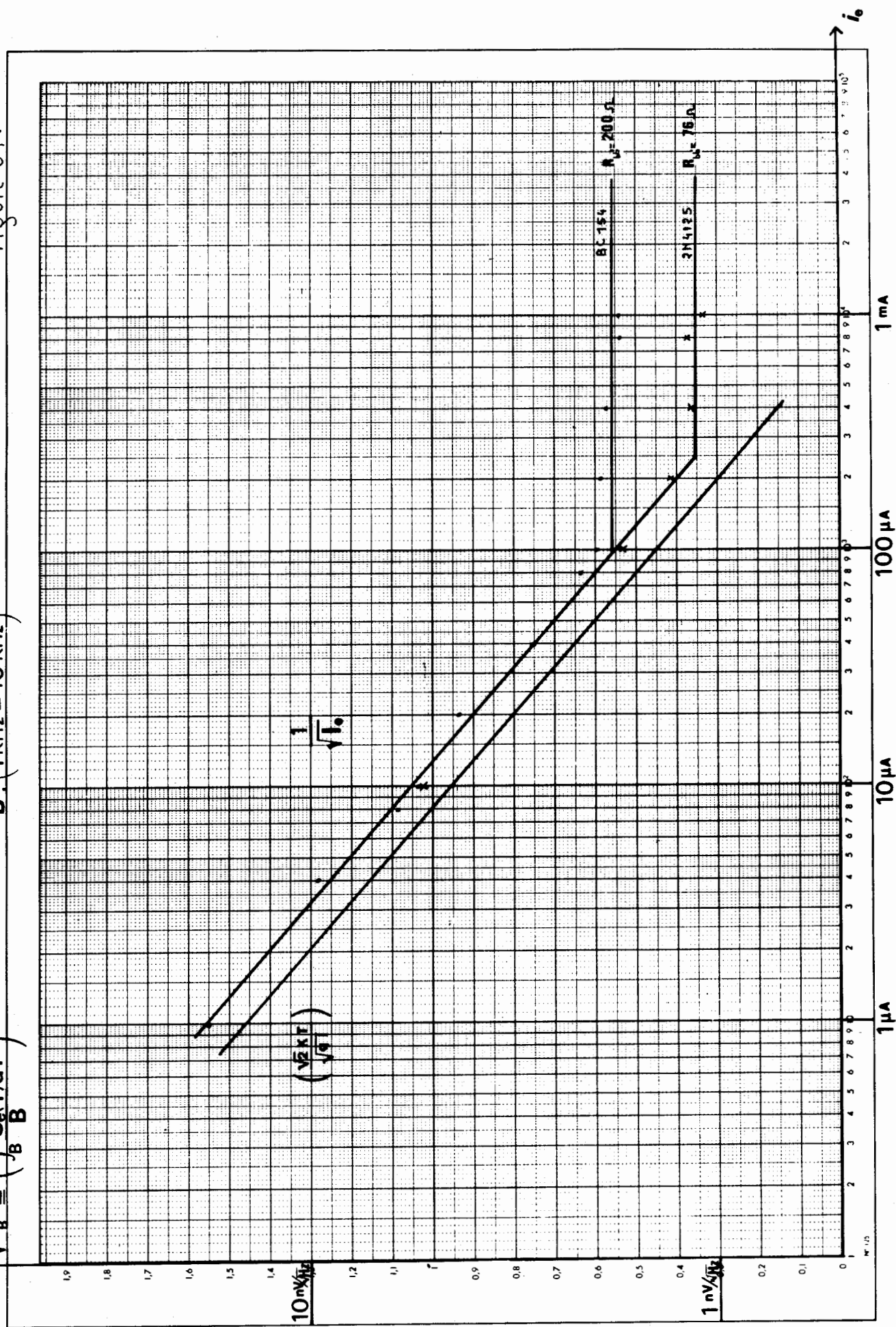
Banc de mesure.



- Figure 67 -

$$\sqrt{e_B^2} = \left(\int_B S_e(f) df \right)^{\frac{1}{2}} \quad B: (1 \text{ KHz} - 10 \text{ KHz})$$

- figure 67.



Si la résistance de source est importante, le courant de bruit $\overline{i_s^2}$ résulte de l'amplification du courant $\overline{i^2}$.

$$\overline{i^2} = \frac{\overline{i_s^2} (R_s = \infty)}{\beta^2}$$

$$\overline{i^2} = \frac{\overline{i_c^2}}{\beta^2} + \overline{i_b^2} + \overline{i_f^2} + \overline{i_u^2} \approx \overline{i_b^2} + \overline{i_f^2} + \overline{i_u^2}$$

$$(146) \quad S_i(f) = 2 q I_b + \frac{k I_b}{f} \quad 0,5 \leq \beta \leq 2$$

Le terme $\frac{\overline{i_c^2}}{\beta}$ est négligeable pour des transistors à fort β .

Les courbes expérimentales de la figure (69) ont été mesurées avec $R_s = 100 \text{ k}\Omega$, le bruit thermique de cette résistance de source étant déduite des résultats. Il faut noter l'influence du bruit de scintillation (bruit en excès) en basse fréquence. ($f \leq 10 \text{ KHz}$).

Remarques :

- La tension $\overline{e^2}$ et le courant $\overline{i^2}$ ne sont pas entièrement décorrélés. Si nous considérons le bruit de grenaille, la transformation du quadripôle de la figure (65) nous donne :

$$\overline{e^2} = R_e^2 \overline{i_c^2}$$

$$\overline{i^2} = \overline{i_b^2} + \frac{\overline{i_c^2}}{\beta^2} - 2 R_e \left(\frac{\overline{i_c i_b}}{\beta} \right)$$

$$\overline{ei} = R_e \overline{i_c i_b} - \frac{R_e}{\beta} \overline{i_c^2}$$

$$(147) \quad S_{ei}(f) = \frac{2 k T}{\beta}$$

pour des transistors à β élevé, $S_{ei}(f)$ est négligeable.

- Le coefficient β à une fréquence de coupure f_β :

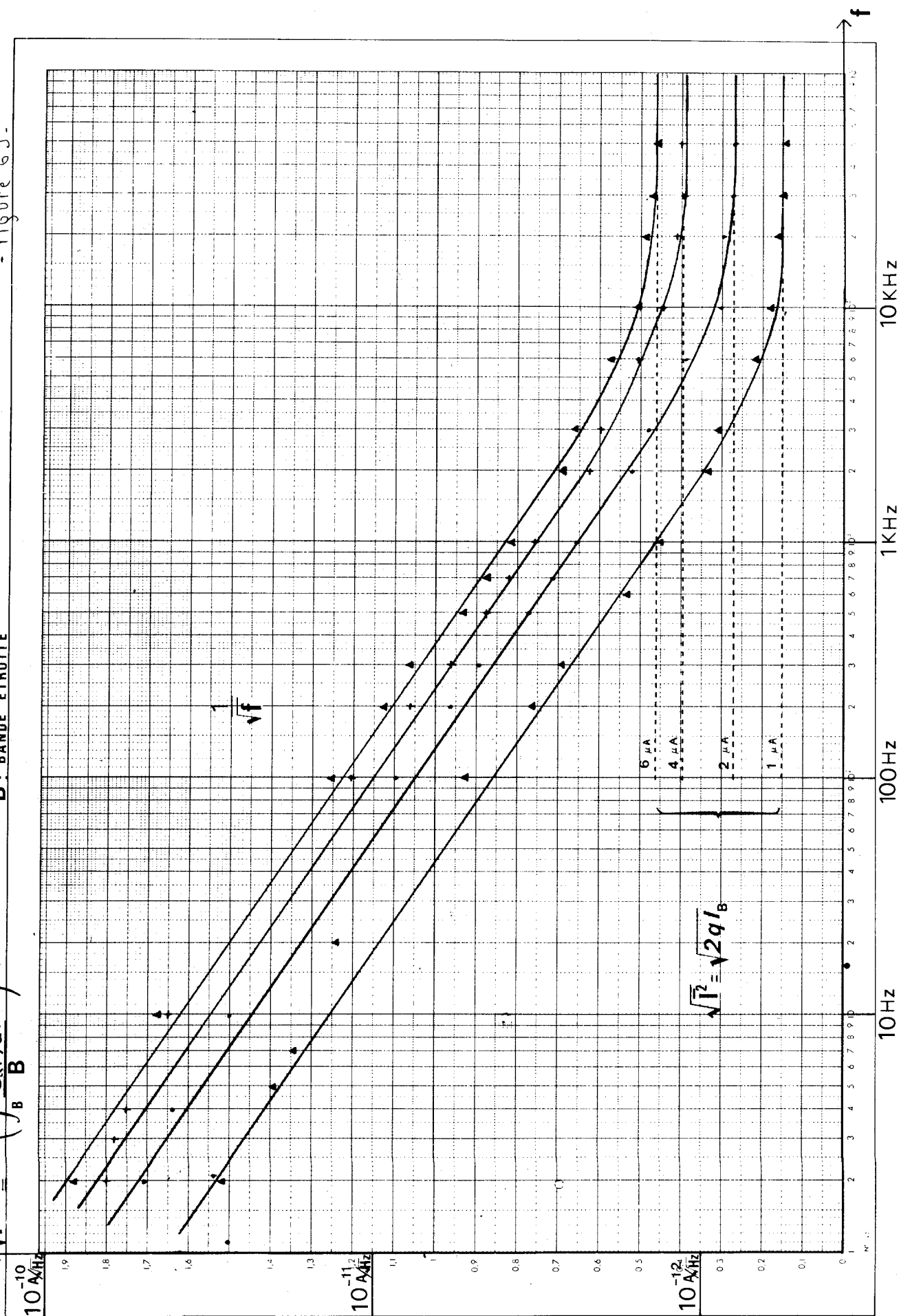
$$(148) \quad \beta = \frac{\beta_0}{1 + j(f/f_\beta)}$$

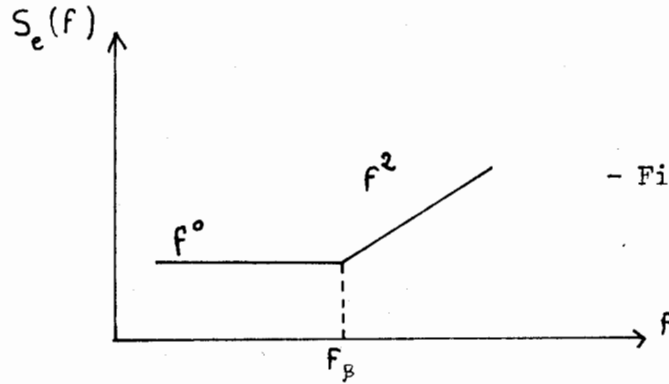
Le gain en émetteur commun chute après la fréquence de coupure f_β avec une pente f^{-1} . Le bruit ramené à l'entrée croît alors comme f^2 :

- figure 69 -

B : BANDE ETROITE

$$\sqrt{I^2} = \left(\int_B \frac{S(f) df}{B} \right)^{\frac{1}{2}}$$





- Figure 70 -

II.3.2.3 - Facteur de bruit

Dans le modèle précédemment décrit, l'amplificateur ayant un gain G , la tension de bruit de sortie vaut :

$$\sqrt{V_s^2} = G [\bar{e}^2 + \bar{e}_s^2 + \bar{U}^2 R_s^2]^{\frac{1}{2}}$$

Il est intéressant de préciser maintenant la définition du facteur de bruit, car celle-ci introduit souvent des erreurs dans le choix des transistors :

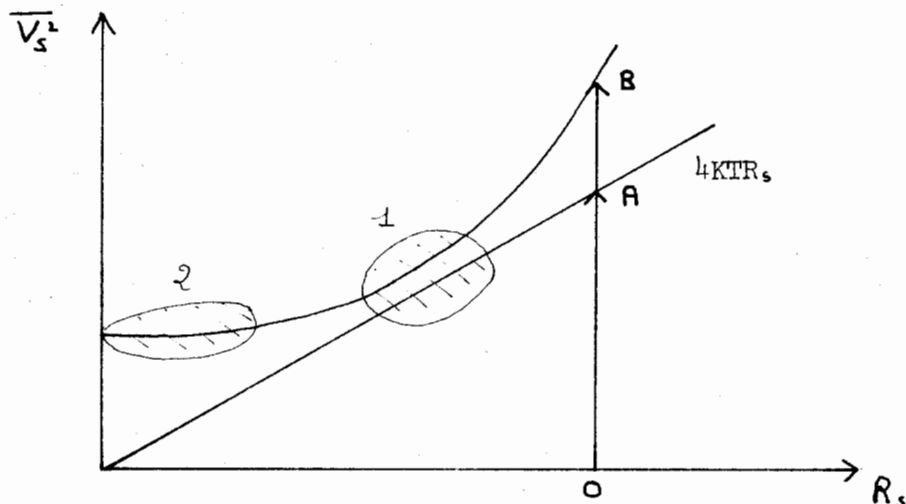
$$NF = 20 \log \frac{\sqrt{V_s^2} G}{\sqrt{4 K T R_s}}$$

$$NF = 10 \log \left[\frac{4 K T R_s + \frac{1}{B} \int_{f^0}^B S_e(f) df + \frac{1}{B} \int_{f^0}^B S_e(f) R_s^2 df}{4 K T R_s} \right]$$

(149)

$$NF = 10 \log \left[1 + \frac{\int_{f^0}^B S_e(f) df + R_s^2 \int_{f^0}^B S_e(f) df}{4 K T R_s B} \right]$$

Une interprétation graphique de ce facteur est représentée sur la figure (71) :



- Figure 71 -

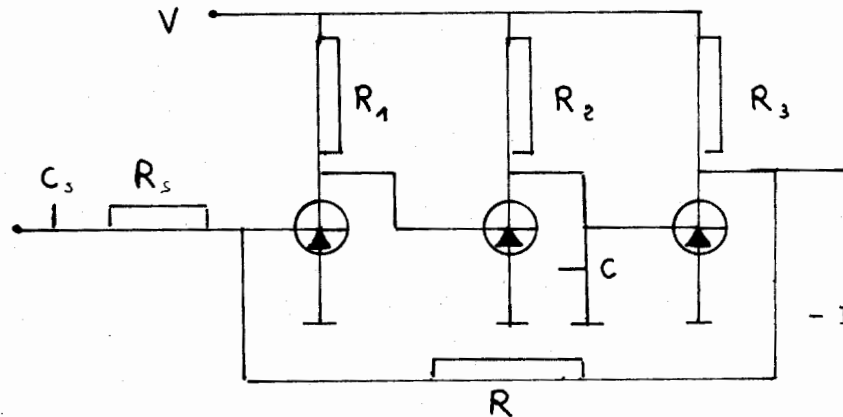
(150)

$$NF = 10 \log \left[\frac{OA + OB}{OA} \right] = 10 \log \left[1 + \frac{OB}{OA} \right]$$

NF est minimum dans la zone 1 ; bien que cette zone ne corresponde pas au minimum de bruit (zone 2). C'est pourquoi nous n'utiliserons pas la notion de facteur de bruit pour qualifier notre amplificateur car nous recherchons un niveau de bruit minimum à la sortie de l'amplificateur (zone 2), plutôt qu'une optimisation du facteur de bruit (zone 1).

II.4 - Optimisation du préamplificateur faible bruit

Le préamplificateur comporte trois transistors montés en contre-réaction avec un couplage capacitif.

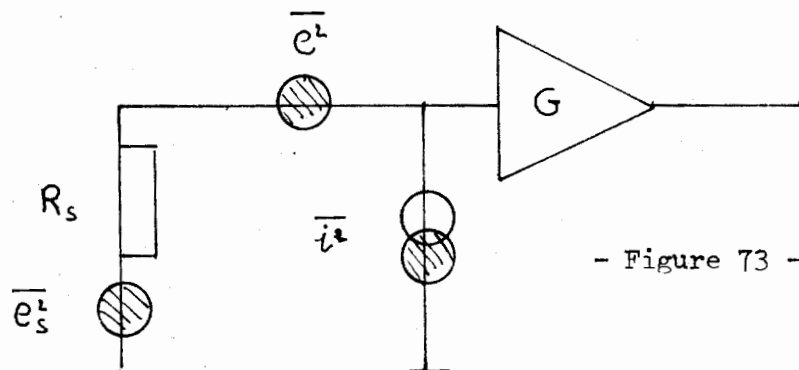


- Figure 72 -

Le gain est donné par le rapport des résistances R_s et R :

$$G = \frac{R}{R_s}$$

Les transistors étant montés en émetteur commun, nous pouvons utiliser le schéma équivalent simplifié introduisant les sources de bruit $\overline{e^2}$ et $\overline{i^2}$:



- Figure 73 -

Comme nous le montrons en annexe (H), seul le premier étage intervient dans le bruit de l'amplificateur, les sources e^2 et i^2 ne dépendant ainsi que du premier transistor :

$$(151) \quad \left\{ \begin{array}{l} S_{e_s}(f) = 4 K T R_s \\ S_e(f) = 4 K T \left(R_{bb'} + \frac{R_s}{2} \right) + \frac{K_1 I_B^\alpha R_{bb'}^2}{F} \quad (0,5 \leq \alpha \leq 1) \\ S_L(f) = 2 q I_B + \frac{K_2 I_B^\beta}{F} \quad (0,5 \leq \beta \leq 2) \\ S_{c_i}(f) = \frac{2 K T}{\beta} \end{array} \right.$$

Soit V_b la tension de bruit en sortie (on pose $G = 1$) :

$$2) S_{V_b}(f) = \left(4 K T (R_s + R_{bb'}) + \frac{2 (K T)^2}{q I_{C_1}} + \frac{2 q I_{C_1} R_s^2}{\beta} + \frac{K_1 I_B^\alpha R_{bb'}^2}{F} + \frac{K_2 I_B^\beta R_s^2}{F} + \frac{2 K T R_s}{\beta} \right)$$

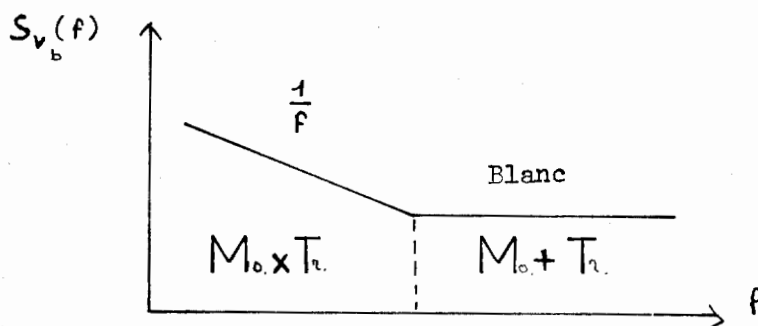
Cette relation comporte 5 paramètres :

- R_s : impédance de source ;
- $R_{bb'}$: résistance de base ;
- β : gain en courant du premier transistor ;
- I_c : courant collecteur du premier transistor ;
- K_1 et K_2 : constante du bruit de scintillation.

Deux facteurs dépendent du montage : I_c et R_s .

quatre facteurs dépendent du transistor : β , $R_{bb'}$, K_1 et K_2 .

La densité spectrale de la tension V_b est la somme de deux bruits : blanc et scintillation :



- Figure 74 -

Le bruit blanc dépend du montage avec les termes :

$$\left[4 K T R_s + \frac{2 (K T)^2}{q I_{c1}} + \frac{2 q I_c R_s^L}{\beta} \right]$$

et du transistor avec le terme : $(4 K T R_{bb'})$

Le bruit de scintillation dépend du montage et du transistor de manière inséparable :

$$\left[\frac{K_1 I_s^Y R_{bb'}^L}{F} + \frac{K_2 I_s^P R_s^L}{F} \right]$$

Le terme de corrélation est négligé pour des transistors à fort β .

1- Supposons R_s fixe et I_{c1} variable.

Les quatre termes intervenant dans le bruit blanc imposent une plage de polarisation ΔI_c . (Voir la courbe expérimentale de la figure 75).

En fonction de I_c , nous obtenons les trois pentes : $\frac{1}{\sqrt{I_c}}$, I_c^0 , $\sqrt{I_c}$.

2- I_c fixe et R_s variable.

Le minimum de bruit est obtenu pour $R_s \leq R_{min}$. (Voir la figure 76).

En fonction de R_s , nous obtenons les trois pentes : R_s^0 , $\sqrt{R_s}$, R_s .

3- I_c et R_s variables.

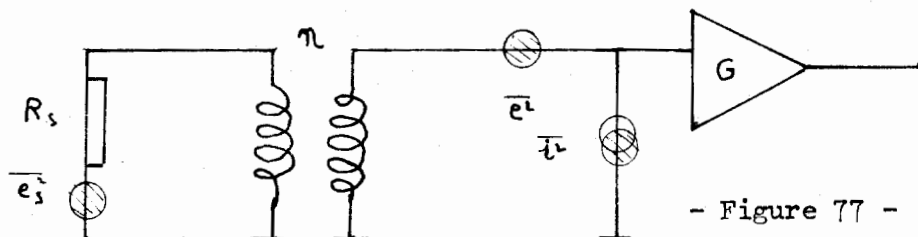
Le montage impose souvent une valeur minimale pour l'impédance de source (R_{min}). Le préamplificateur étant à couplage capacitif, cette valeur minimale est imposée par la fréquence à 3 dB du passe-bas d'entrée ($2\pi R_s C$). La figure (76) montrant que R_s doit être aussi petite que possible, nous utiliserons la valeur R_{min} . Nous sommes ainsi ramenés au premier cas.

Deux possibilités peuvent se présenter : $R_s > R_{bb'}$ ou $R_s < R_{bb'}$.

Dans le premier cas, le minimum de bruit est obtenu dans la plage ΔI_c .

Dans le deuxième cas, le bruit de la résistance $R_{bb'}$ est prépondérant.

Le transistor n'est alors pas adapté à sa résistance de source. Le montage nécessite un rapport de transformation :



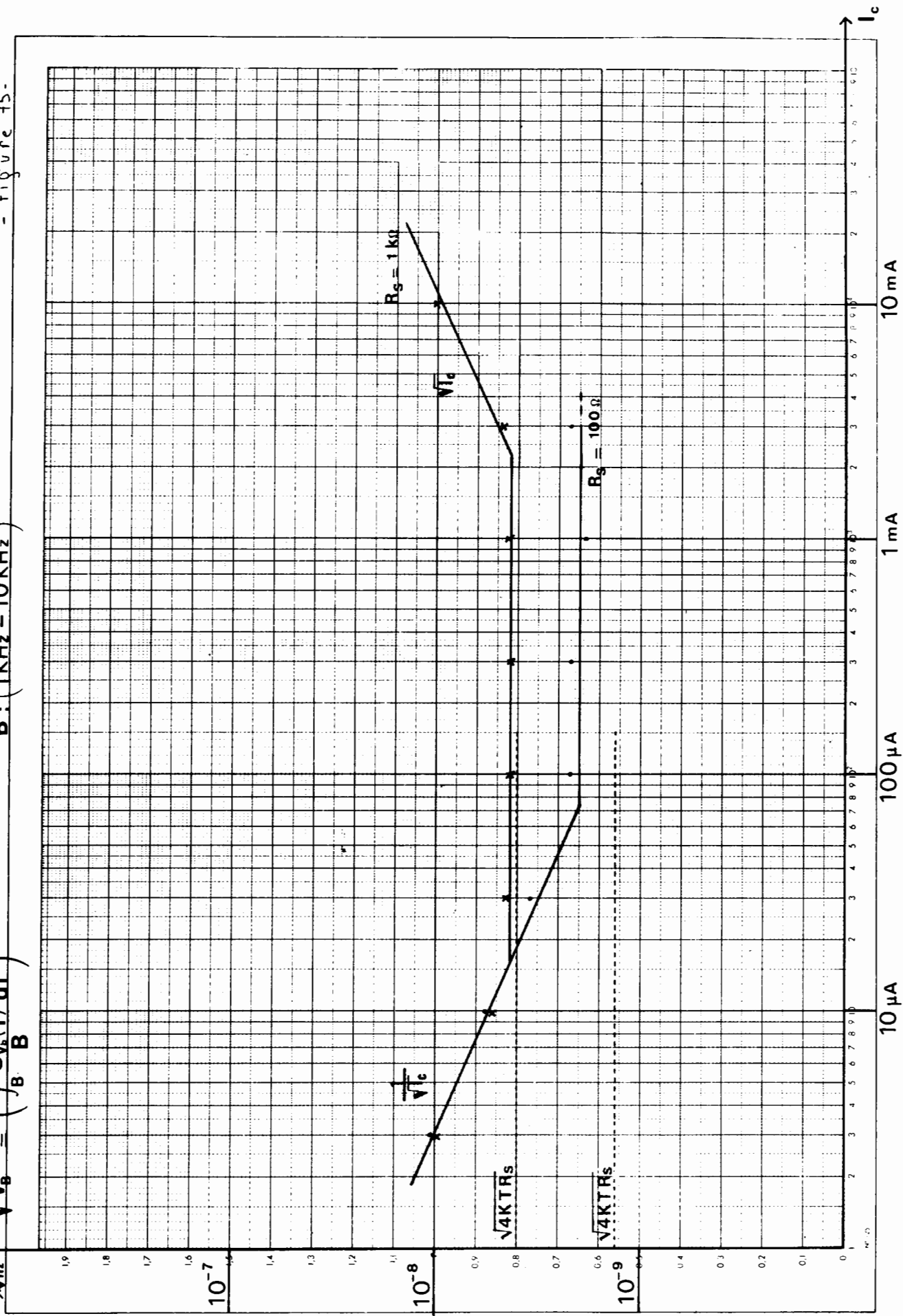
- Figure 77 -

n est choisi afin que $\frac{R_{bb'}}{n^2} < R_s$.

$$\sqrt{V_B^2} = \left(\int_B S_{V_B}(f) df \right)^{\frac{1}{2}}$$

B: (1KHz - 10KHz)

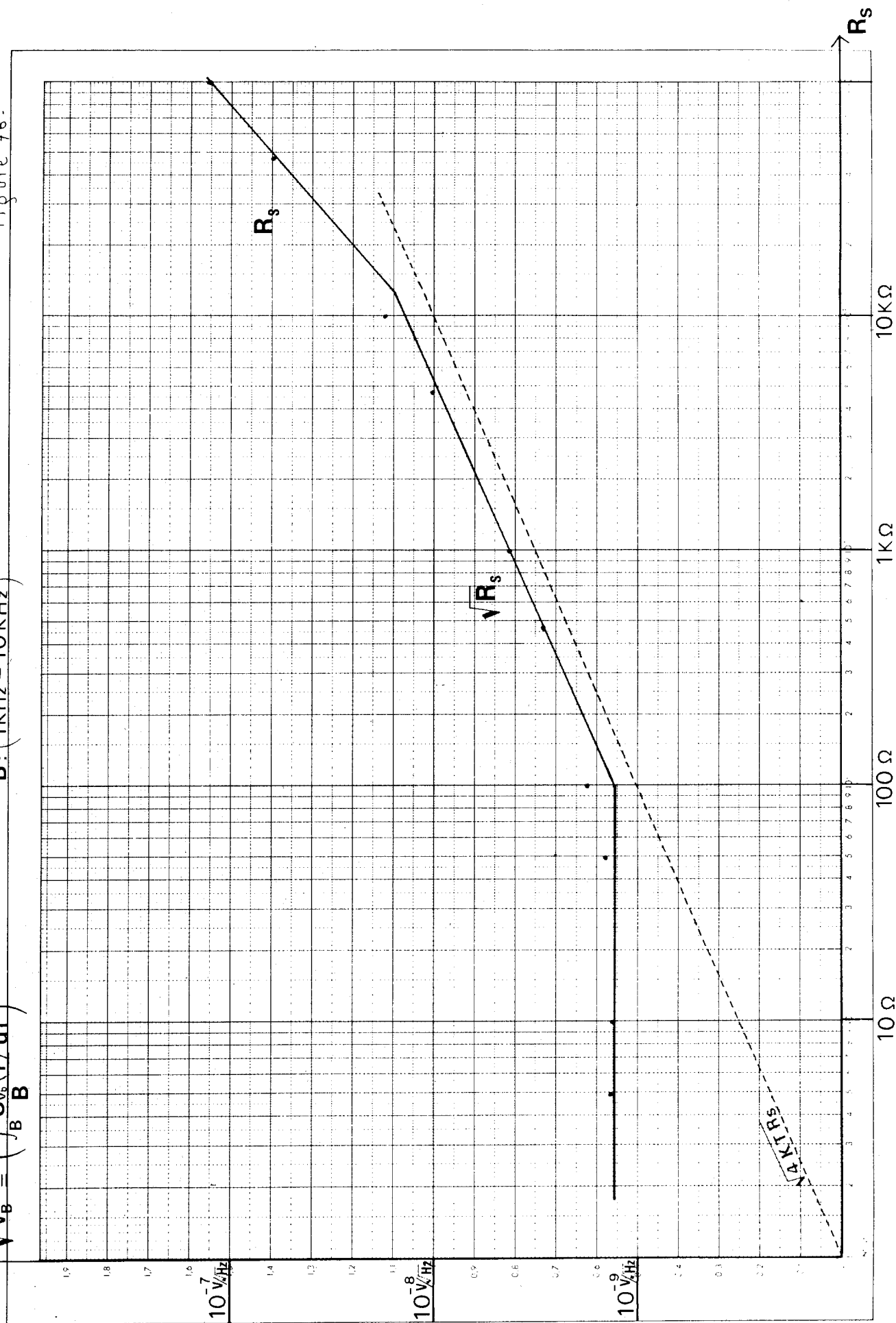
- figure 75-



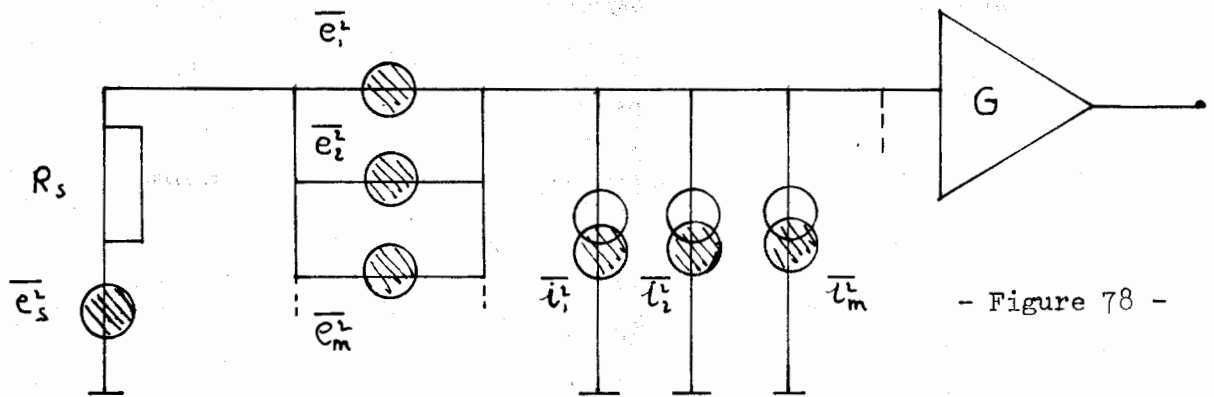
$$\sqrt{V_B^2} = \left(\int_B \frac{S_{V_0}(f)}{B} df \right)^{\frac{1}{2}}$$

B: (1KHz - 10KHz)

- figure 76 -

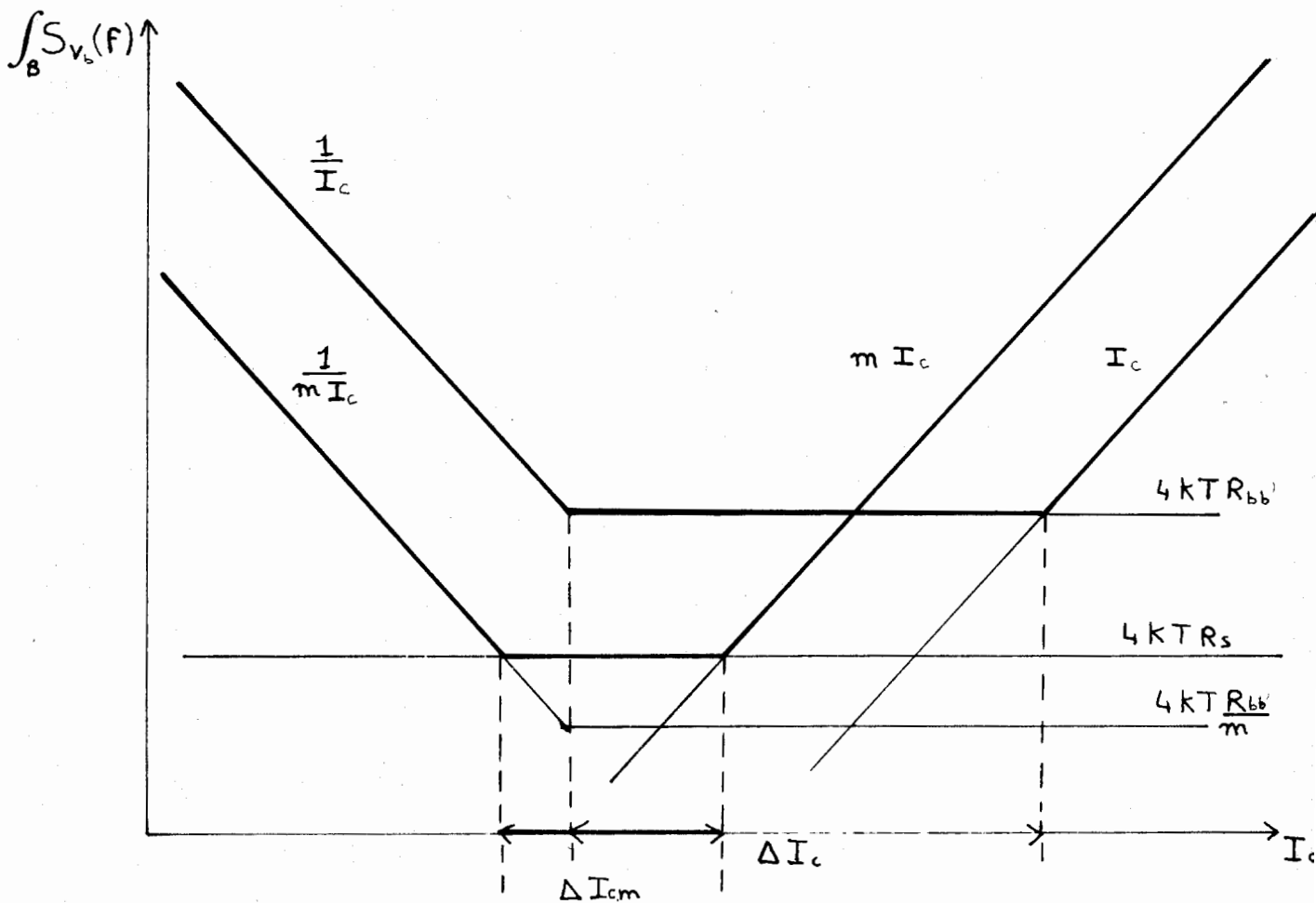


Cette transformation est réalisée en plaçant m transistors en parallèle (le rapport de transformation étant $\sqrt{m}$).

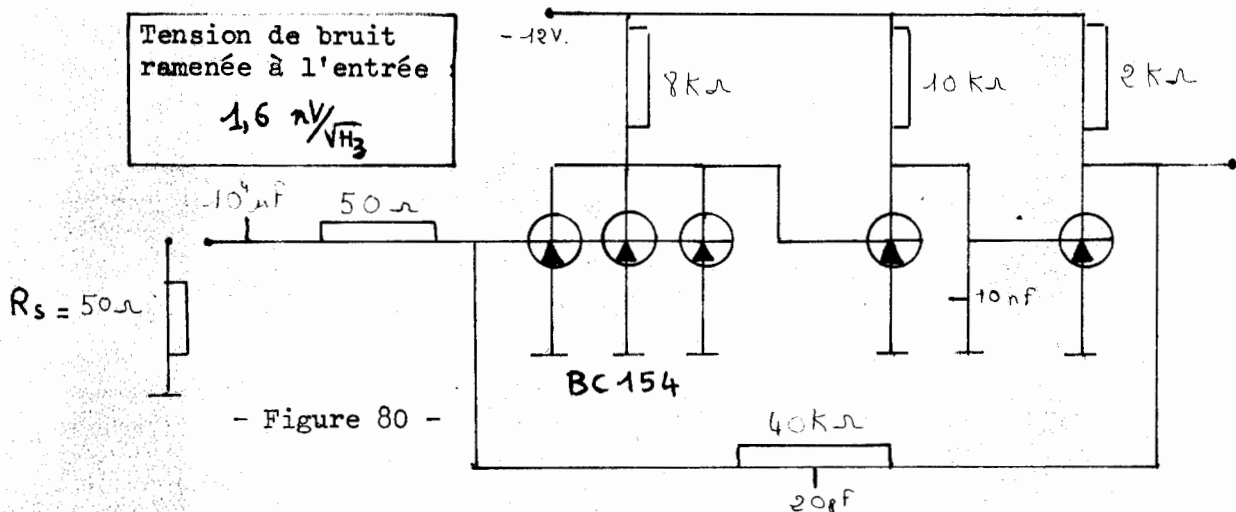


- Figure 78 -

Le nouveau domaine d'optimisation ΔI_m est représenté sur la figure (79).



- Figure 79 -



Nous avons ainsi optimisé le bruit blanc de l'amplificateur. Le bruit de scintillation dépend du montage et des transistors :

$$\left(\frac{K_1 I_B^\alpha R_{bb}^2}{F} + \frac{K_2 I_B^\beta R_S^L}{F} \right)$$

Les termes R_{bb} , R_S et I_B sont maintenant imposés, il faut utiliser des transistors à fort β et les trier selon K_1 et K_2 . Le niveau de ce bruit sera faible car les valeurs de R_S et R_{bb} sont petites. Il faut rappeler les critères de choix des transistors pour l'optimisation du bruit flicker : type pnp, β élevé, résistance de base R_{bb} , faible.

II.5 - Description du banc de mesure

II.5.1 - Banc de mesure

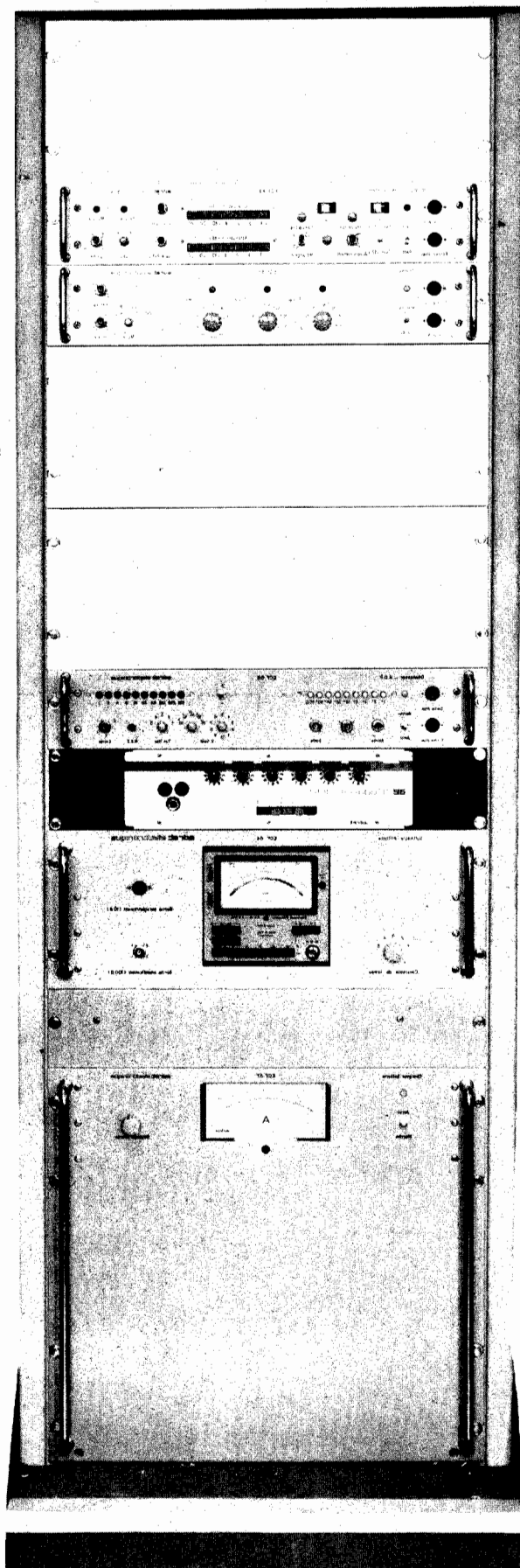
L'étude précédente concernait la démodulation et l'amplification du bruit de phase de l'oscillateur à étudier. Les circuits correspondants sont implantés dans un module "rack". Ces circuits sont suivis par un ensemble de jeux de filtres dans un second module "rack" :

- filtres passe-bande étroits pour l'analyse spectrale ;
- filtres passe-haut pour l'estimation de la variance d'Allan ;
- filtres passe-bande à Q constant pour un autre estimateur du bruit à court terme des oscillateurs (variance passe-bande, réf. 20).

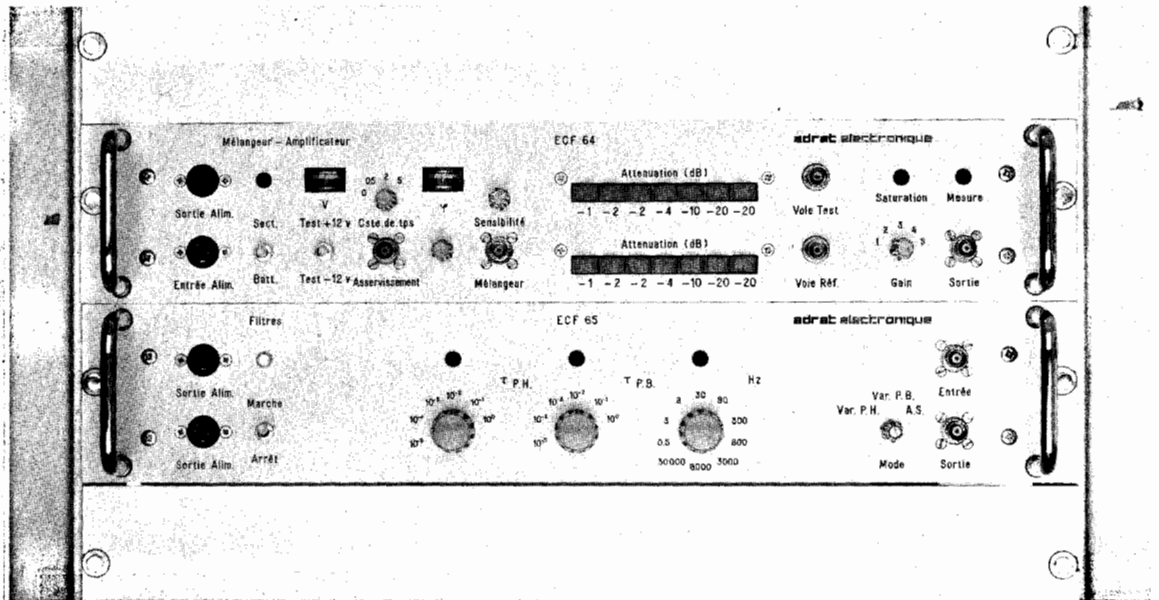
Un troisième module "rack" comporte un voltmètre efficace vrai possédant plusieurs constantes de temps.

Le banc de mesure est complété par un déphaseur coaxial et par un analyseur de densité de probabilité, dont le principe a été étudié au premier chapitre.

L'ensemble de ces modules est réuni dans une baie - figure (81)



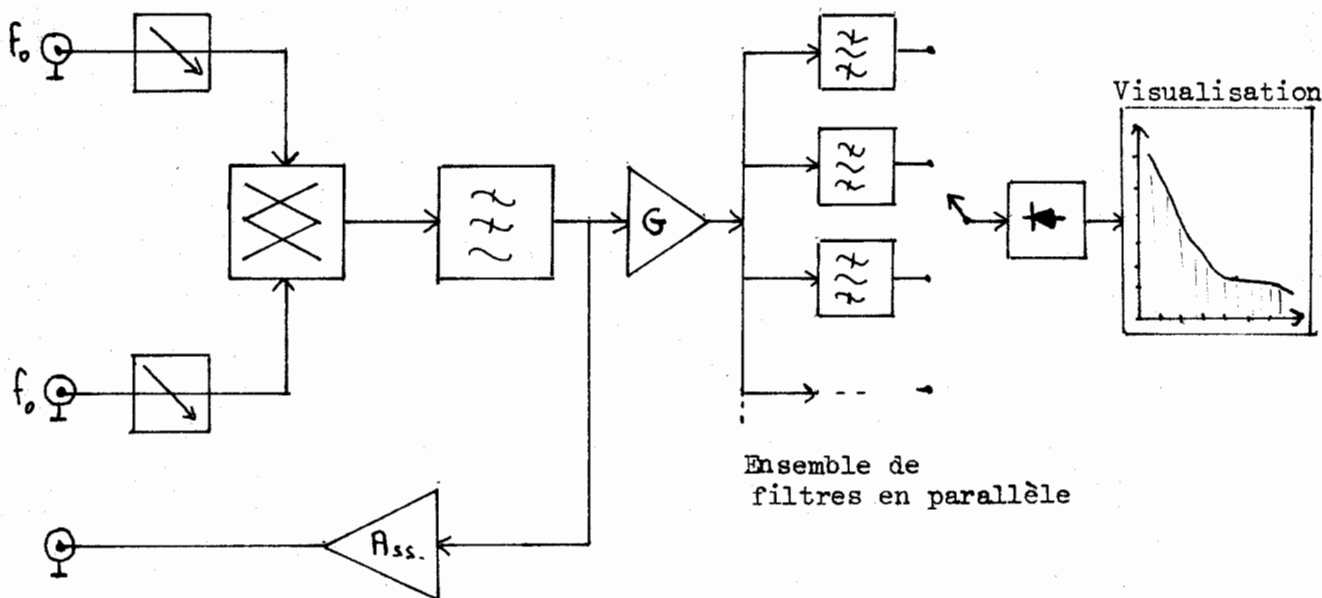
Les deux premiers modules (démodulation, amplification, filtrage du bruit de phase) sont représentés sur la figure suivante :



- Figure 82 -

II.5.2 - Filtres d'analyse

La nature du filtre utilisé (passe-bande ou passe-haut) permet d'effectuer soit l'analyse spectrale des fluctuations de phase, soit l'estimation de la variance d'Allan. Un avantage important de cette méthode est la possibilité de réaliser ces mesures en temps réel, en introduisant à la sortie de l'amplificateur un ensemble de filtres en parallèle.



- Figure 83 -

On peut tracer en temps réel, soit la densité spectrale $S_{\phi}(f)$, soit la variance passe-haut $\langle \sigma_{PH}(\tau) \rangle$.

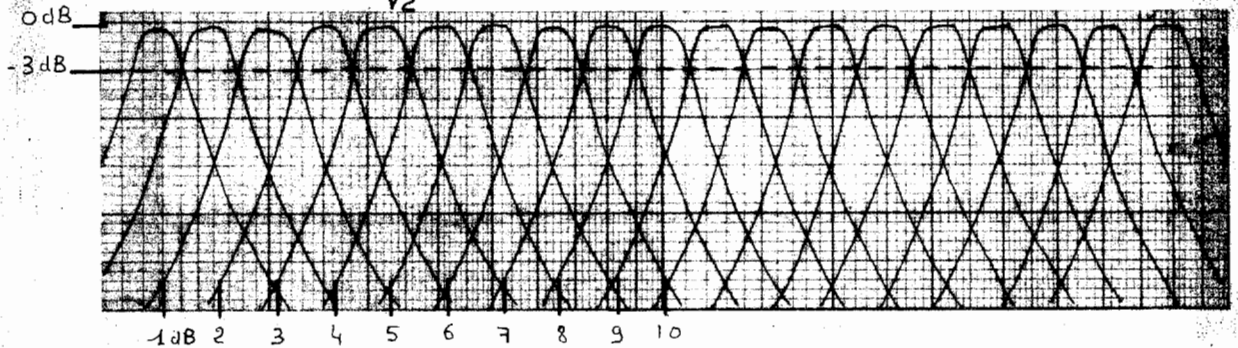
Pour effectuer une analyse spectrale complète, les bandes passantes (à 3 dB) des filtres doivent être adjacentes. En considérant une échelle logarithmique, on obtient ainsi les filtres 1/1 octave, 1/3 octave : par exemple, 10 filtres répartis régulièrement sur une décade conduisent à des filtres tiers d'octave.

$$(153) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ filtre par dB : } 1 \text{ dB} = 10 \log \sqrt[3]{2} \text{ soit } F_{0,1} = \sqrt[3]{2} F_0. \\ \text{bande passante } 0,5 \text{ dB : } 0,5 \text{ dB} = 10 \log \sqrt[6]{2} \text{ soit } \left[F_1 = \frac{F_0}{\sqrt[6]{2}} ; F_2 = \sqrt[6]{2} F_0 \right] \end{array} \right.$$

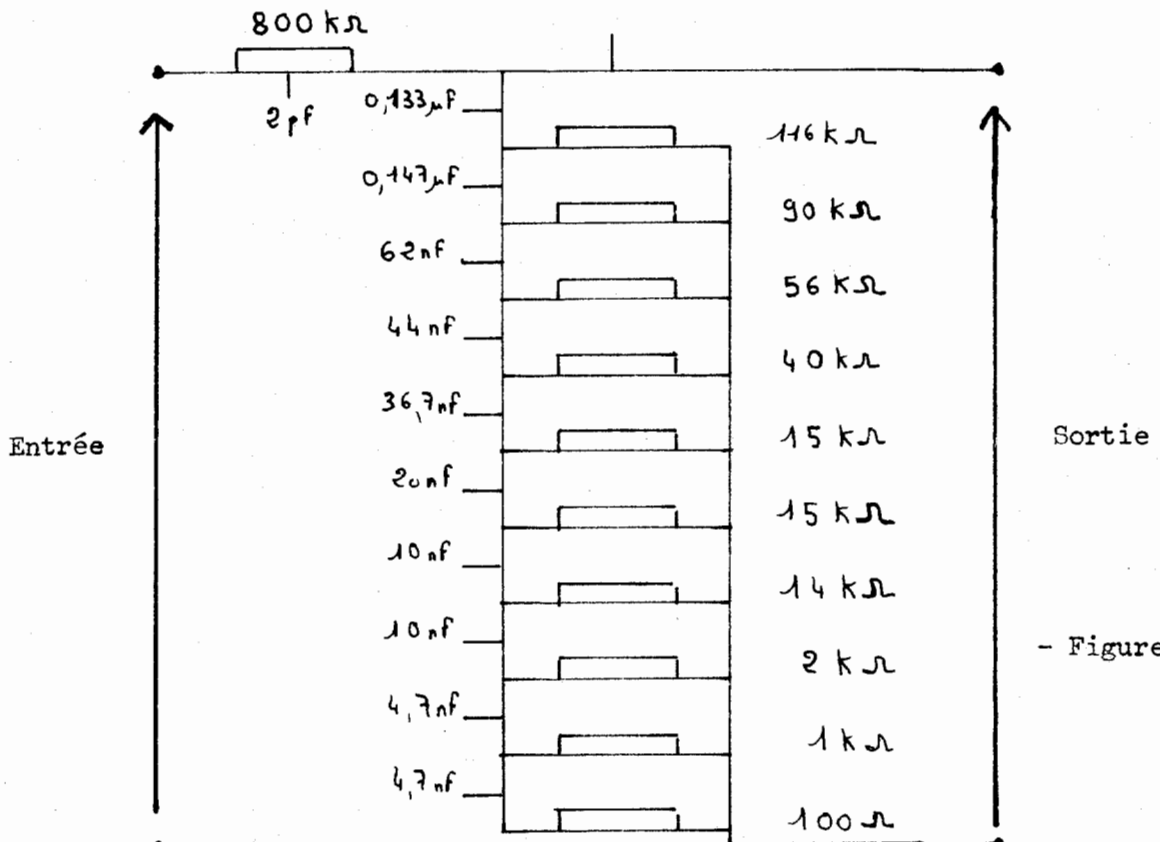
Le coefficient de qualité ainsi obtenu est donné par :

$$(154) \quad Q = \frac{1}{\sqrt[6]{2} - \frac{1}{\sqrt[6]{2}}} = 4,318$$

- Figure 84 -

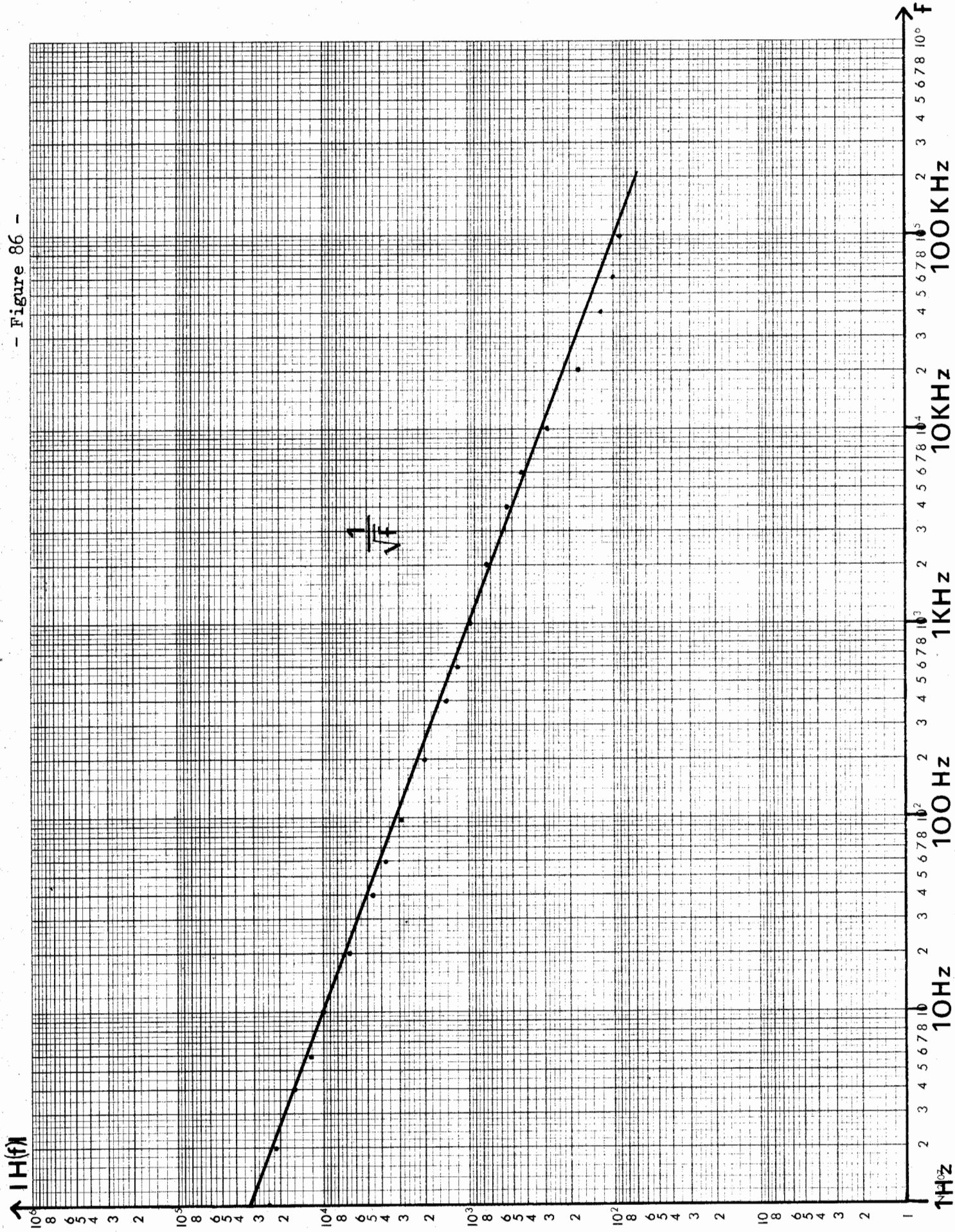


La bande passante des filtres étant proportionnelle à la fréquence centrale, une compensation en $F^{-1/2}$ est nécessaire. Un filtre RC, réalisé dans ce but, couvre la bande (1 Hz - 10 kHz).



- Figure 85 -

- Figure 86 -

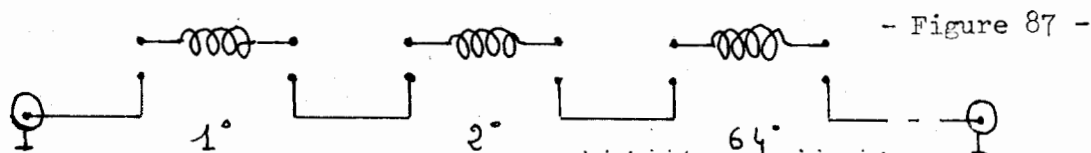


II.5.3 - Déphaseur et analyseur de densité de probabilité

a) Déphaseur

Pour compenser ou introduire un déphasage sur l'une des voies du comparateur de phase, un déphaseur coaxial, introduisant un minimum de bruit, a été réalisé.

Le câble RG 174U utilisé nécessite une longueur de 9,9 cm par degré à 5 MHz.



Les pas codés en 1 - 2 - 4 - 8 permettent un déphasage degré par degré.

b) Analyseur de densité de probabilité

Dans le premier chapitre, la relation suivante a été établie pour un processus gaussien :

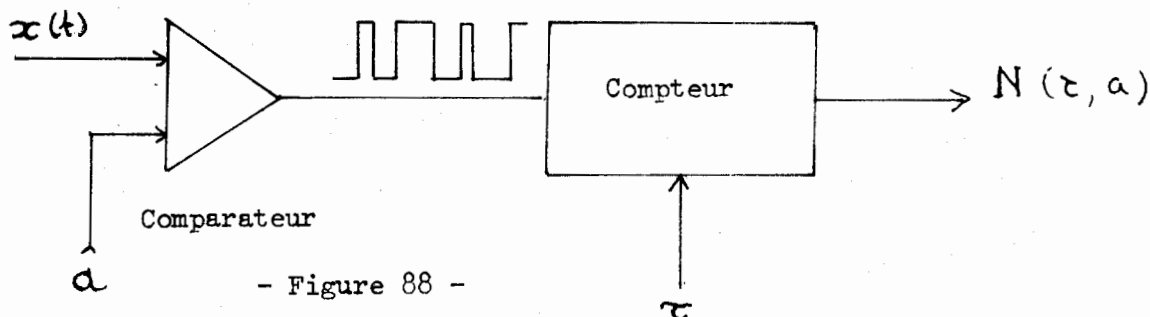
$$(155) \quad E[N(\tau, a)] = \frac{\tau}{\pi} \cdot \frac{\sigma_z}{\sigma_x} \cdot e^{-\frac{a^2}{2\sigma_x^2}}$$

$E[N(\tau, a)]$: nombre moyen de passage à un niveau a pendant la durée τ .

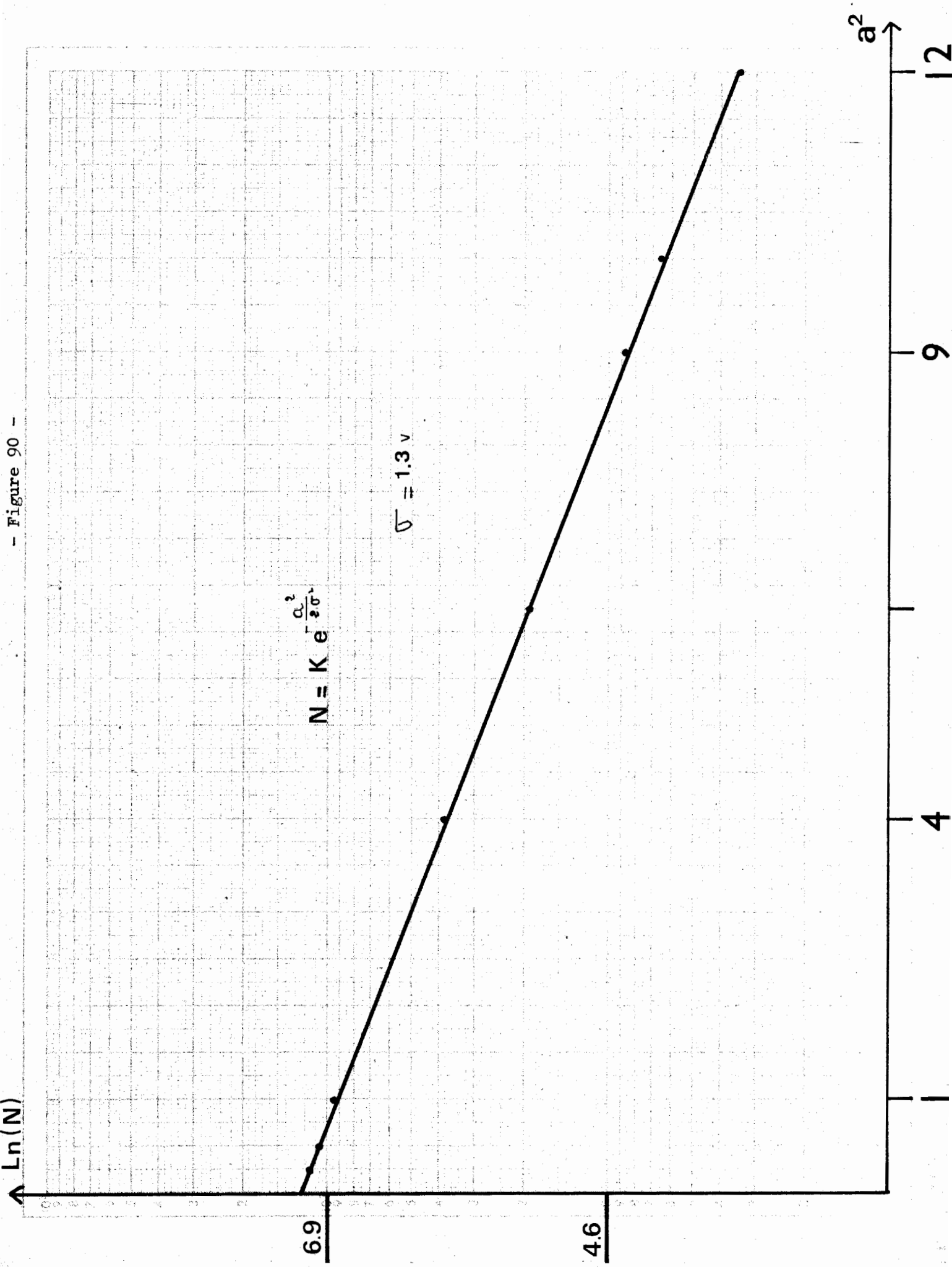
La représentation graphique du logarithme de $E[N(\tau, a)]$ en fonction de la tension a^2 donne une droite de pente $-\frac{1}{2\sigma_x^2}$ pour un processus gaussien. La figure 90 représente une courbe expérimentale de $E[N(\tau, a)]$.

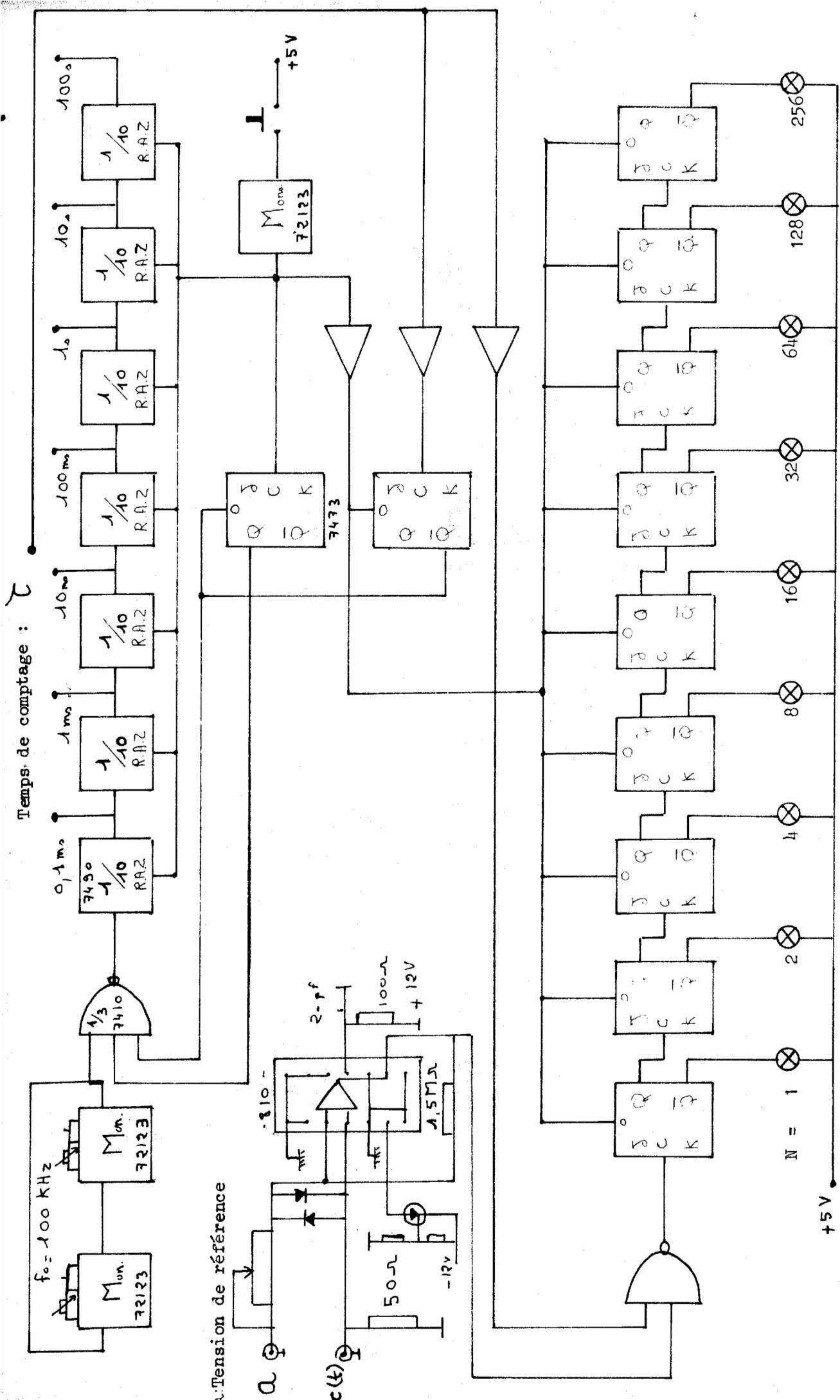
Le schéma synoptique de ce banc de mesure est simple :

(Le schéma complet est donné figure 89)



- Figure 90 -





- Figure 89 -

II.5.4 - Problème de masse

Les niveaux de tension mesurés étant très faibles, le montage est très sensible aux rayonnements parasites tel que celui du secteur (50 Hz et ses multiples). Deux précautions s'imposent :

- L'ensemble de la baie est alimenté par deux batteries de 12 volts, reliées à un chargeur qui est déconnecté pendant les mesures.
- Les boucles de masse doivent être évitées. Le premier module est le plus sensible, surtout au niveau du détecteur de phase et du préamplificateur. Les circuits sont montés avec un seul point de masse. Les points sensibles restant les deux entrées, il faut étudier le parcours des masses des circuits extérieurs intercalés entre les sources et le mélangeur.

III - REALISATION DES MESURES

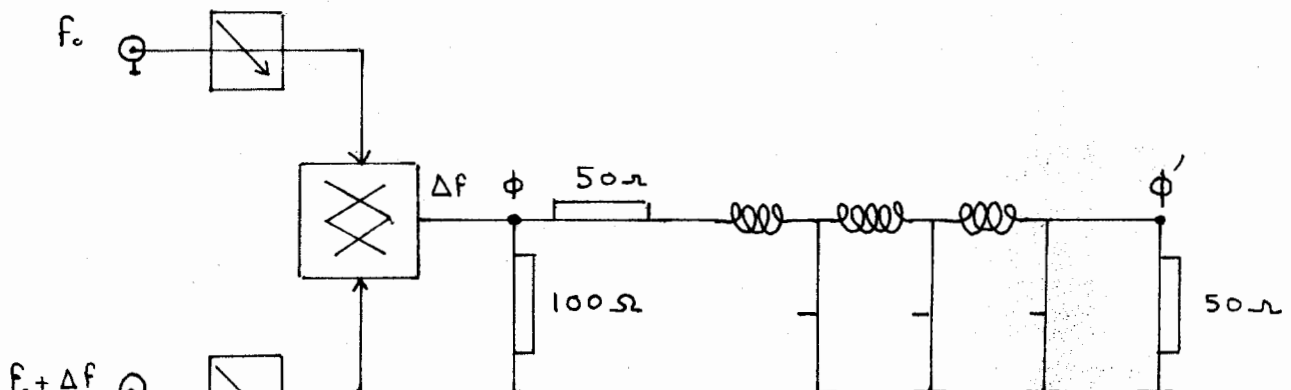
III.1 - Mesures dans le domaine temps

La tension lue sur le voltmètre efficace (V_b) est reliée à la variance passe-haut par la relation (cf § I.5.1)*:

(156)

$$\langle \sigma_{p.h}(\tau) \rangle = \frac{\sqrt{8}}{\omega \cdot \tau} \cdot \frac{V_b}{K_\phi G}$$

On mesure K_ϕ en décalant en fréquence les deux sources d'une quantité $\Delta f \ll 100$ kHz et en remplaçant l'amplificateur par une résistance égale à son impédance d'entrée.



- Figure 91 -

* Il faut diviser les résultats par $\sqrt{2}$ si les deux sources contribuent, de manière égale, aux fluctuations $\phi(t)$.

La mesure s'effectue au point ϕ' afin d'éliminer la fréquence $2f_0$.
Sachant que $K_{\phi'} = \frac{1}{2} K_{\phi}$, on mesurera l'amplitude crête-crête du battement Δf en ϕ' . Les atténuateurs d'entrée permettent d'ajuster K_{ϕ} à une valeur ronde (0,2 - 0,1 - etc...).

III.2 - Mesures dans le domaine fréquence

a) Bruit de phase

L'amplificateur délivre une tension $\phi_s(t)$ proportionnelle aux fluctuations de phase :

$$\phi_s(t) = K_{\phi} G \phi(t)$$

L'analyse spectrale de $\phi_s(t)$ conduit à :

$$S_{\phi}(f) = \frac{1}{(K_{\phi} G)^2} S_{\phi_s}(f)$$

$$\mathcal{L}(f) = \frac{1}{2(K_{\phi} G)^2} S_{\phi_s}(f)$$

Les paramètres K_{ϕ} et G sont identiques à ceux des mesures temporelles.
Le passage des mesures de $\langle \sigma_{PH}^2(\tau) \rangle$ aux mesures de : $S_{\phi}(f)$ ou $\mathcal{L}(f)$ s'effectue en commutant les filtres et en reportant la tension lue sur le voltmètre efficace (V_b) dans la relation :

$$(157) \quad 10 \log S_{\phi}(f) = 20 \log \left[\frac{V_b}{K_{\phi} G \sqrt{B}} \right]$$

où B est la bande passante du filtre; d'analyse. (Il faut diviser les résultats par $\sqrt{2}$ si les deux sources contribuent, de manière égale, aux fluctuations $\phi(t)$).

b) Bruit d'amplitude

Lorsque les deux signaux incidents sur le mélangeur sont en phase, la tension de sortie de celui-ci est (voir la relation 138) :

$$\Delta(t) = \frac{\gamma A^2}{2} + \gamma A a(t) = c + \mathcal{R}(t)$$

$$\mathcal{R}(t) = \gamma A a(t) = K_a a(t) = \frac{2 K_{\phi}}{A} a(t)$$

L'analyse spectrale de la tension $\mathcal{R}(t)$ donne le spectre du bruit d'amplitude de la source à étudier :

$$(158) \quad 10 \log S_a(f) = 20 \log \left[\frac{V_b}{K_a G \sqrt{B}} \right]$$

$$10 \log m(f) = 20 \log \left[\frac{V_b}{\sqrt{B} K_{\phi} G \sqrt{B}} \right]$$

Les paramètres K_{ϕ} , G sont identiques à ceux des relations (156, 157).

CHAPITRE IV

POSSIBILITES DE LA TECHNIQUE DE MESURE DU

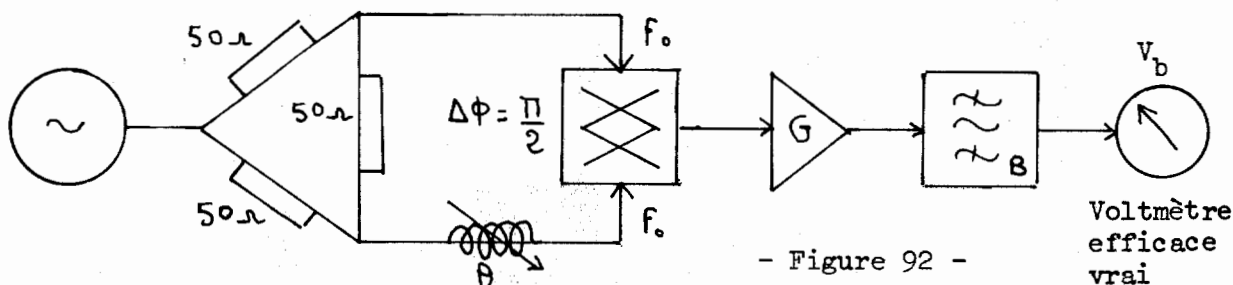
DETECTEUR DE PHASE : RESULTATS EXPERIMENTAUX

	pages
I - Bruit résiduel du banc de mesure.	136
II - Mesure de pilote à quartz.	140
III - Mesure de V.C.O. (Voltage Control Oscillator).	150
IV - Intérêt du banc de mesure pour des générateurs à grande pureté spectrale (ex synthétiseurs).	157
V - Mesure du bruit résiduel des circuits.	158
VI - Banc de mesure hyperfréquence.	160

I - BRUIT RESIDUEL DU BANC DE MESURE

Nous avons rappelé dans le chapitre précédent les précautions indispensables pour la mesure du bruit résiduel du comparateur de phase et de l'amplificateur faible bruit.

La source ultra-stable utilisée est un pilote à quartz 10 MHz ; des résistances de 50 ohms, disposées en triangle, réalisent l'adaptation d'impédance entre cette source et les deux voies du mélangeur.



a) Domaine fréquence

La tension du bruit mesuré à la sortie de l'amplificateur G est reportée dans la relation :

$$\mathcal{L}_m(f) = 20 \log \left[\frac{V_b}{2 K_\phi G \sqrt{B}} \right]$$

Ce qui donne le spectre $\mathcal{L}(f)$ minimum mesurable (figure 93). Celui-ci dépend, par l'intermédiaire du facteur K_ϕ du niveau du signal utilisé :

- pour $K_\phi = 0,3 \text{ V/rd}$ ($V = 8,8 \text{ dBm}$), le bruit blanc se situe à -170 dB ;
- pour $K_\phi = 0,2 \text{ V/rd}$ ($V = 4,8 \text{ dBm}$), nous aurions $\mathcal{L}_m(f) = -166,5 \text{ dB}$;
- pour $K_\phi = 0,1 \text{ V/rd}$ ($V = 0 \text{ dBm}$), $\mathcal{L}_m(f) = -160,5 \text{ dB}$.

Cette dynamique (-170 dB ou -160 dB) est suffisante pour mesurer les meilleurs générateurs ultra-stables actuels tels que les oscillateurs à quartz de très haute qualité.

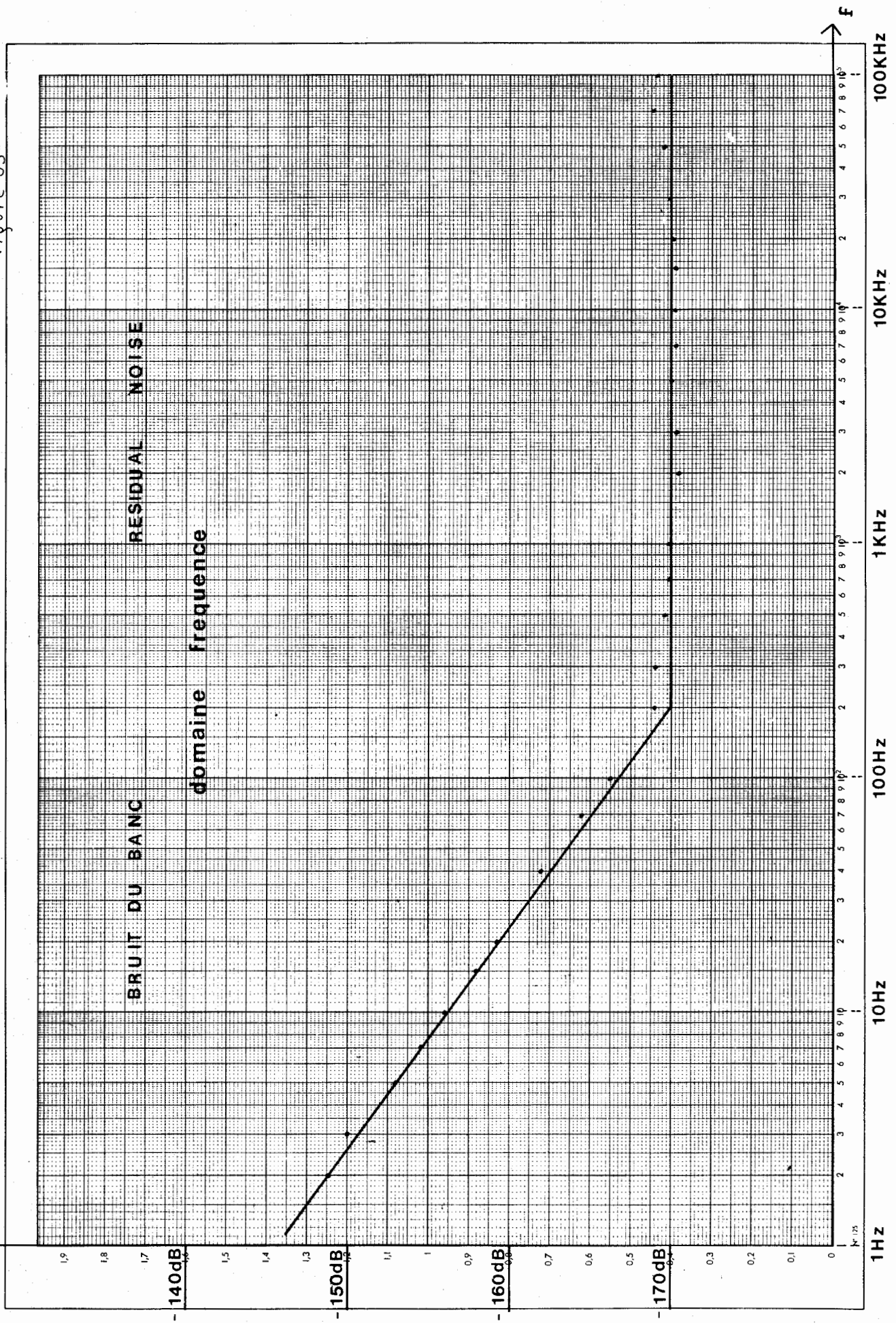
b) Domaine temps

Le filtrage passe-bande utilisé pour la mesure de $\mathcal{L}_m(f)$ est remplacé par le filtrage passe-haut qui donne ainsi la variance minimum mesurable $\langle \sigma_{m,PH}(\tau) \rangle$ en reportant la tension lue sur le voltmètre efficace dans la relation :

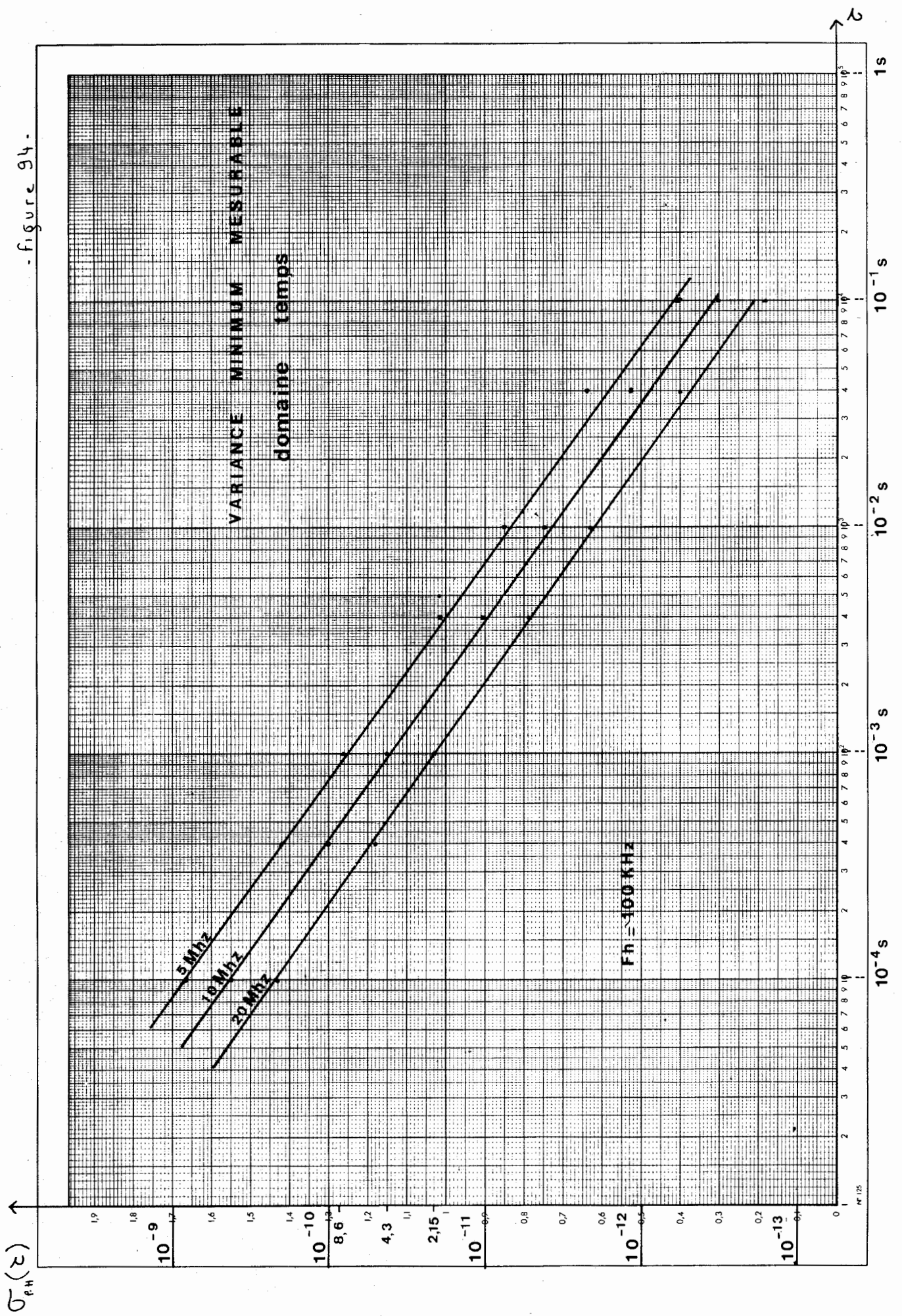
$$\langle \sigma_{m,PH}(\tau) \rangle = \left[\frac{\sqrt{8}}{\omega_0 \tau \sqrt{2} K_\phi G} \frac{V_b}{\sqrt{B}} \right]$$

$L_n(f)$

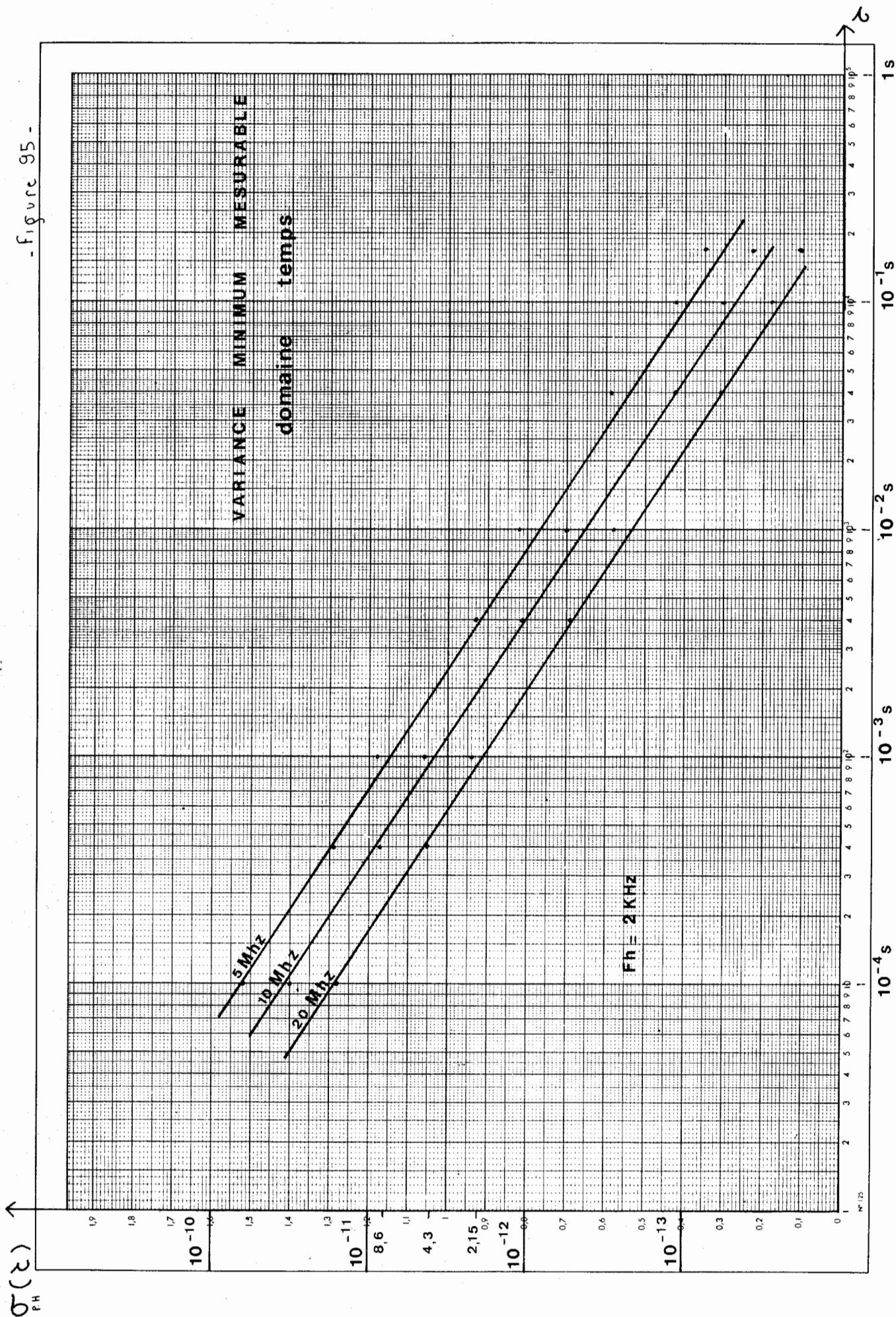
- Figure 93 -



-figure 94-



-figure 95-

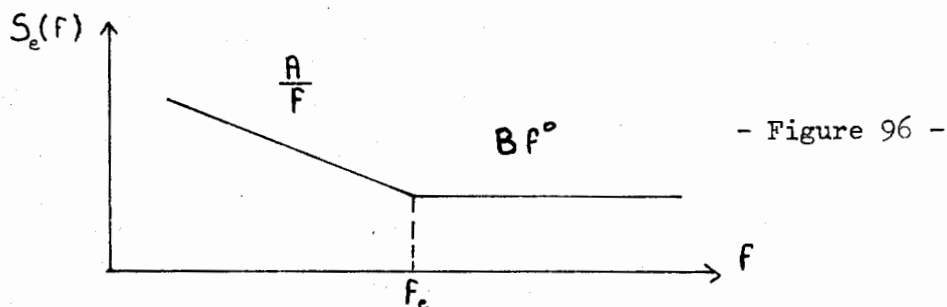


Pour la définir sans ambiguïté, il faut préciser les valeurs de K_ϕ , f_o et f_H . Les figures (94 - 95) représentent $\langle \sigma_{m,PH}(\tau) \rangle$ pour $K_\phi = 0,3$ V/rd avec $f_H = 2$ kHz et 100 kHz et $f_o = 5, 10, 20$ MHz.

II - MESURE D'UN PILOTE A QUARTZ

II.1 - Domaine fréquence

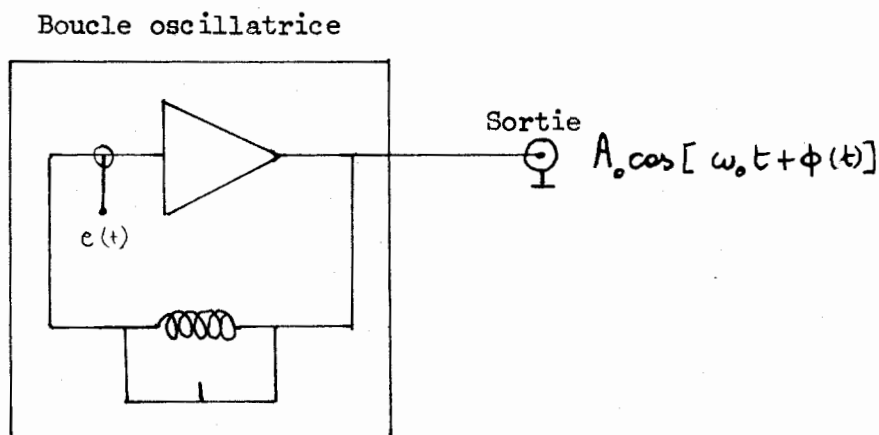
La phase du signal de sortie d'un oscillateur est perturbée par des sources de bruit prenant naissance dans la boucle oscillatrice (bruits internes) ; celles-ci comportent principalement deux termes : le bruit blanc (additif) et le bruit de scintillation (multiplicatif). Il en résulte une modulation de la phase du signal dans la boucle par une tension d'erreur $e(t)$ ayant pour densité spectrale $S_e(f)$:



- Figure 96 -

La fréquence de raccordement f_c dépend du coefficient de qualité de l'oscillateur, du niveau d'oscillation, de la nature et de la qualité des composants (voir réf. (28)).

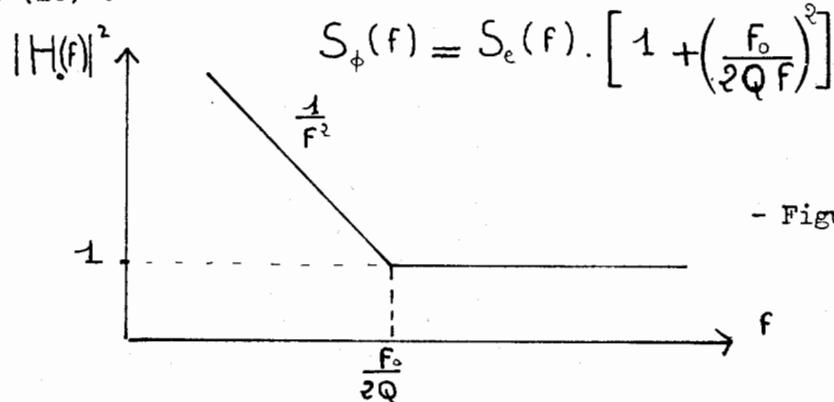
Cette erreur de phase est filtrée par la réponse de la boucle oscillatrice avant d'apparaître sous forme d'un bruit de phase affectant le signal de sortie.



- Figure 97 -

La fonction de transfert du filtrage correspondant ne dépend pas de l'endroit où l'erreur de phase est introduite mais de l'endroit où l'on prélève le signal de sortie. A la sortie de l'amplificateur, on obtient Réf. (28) :

(159)



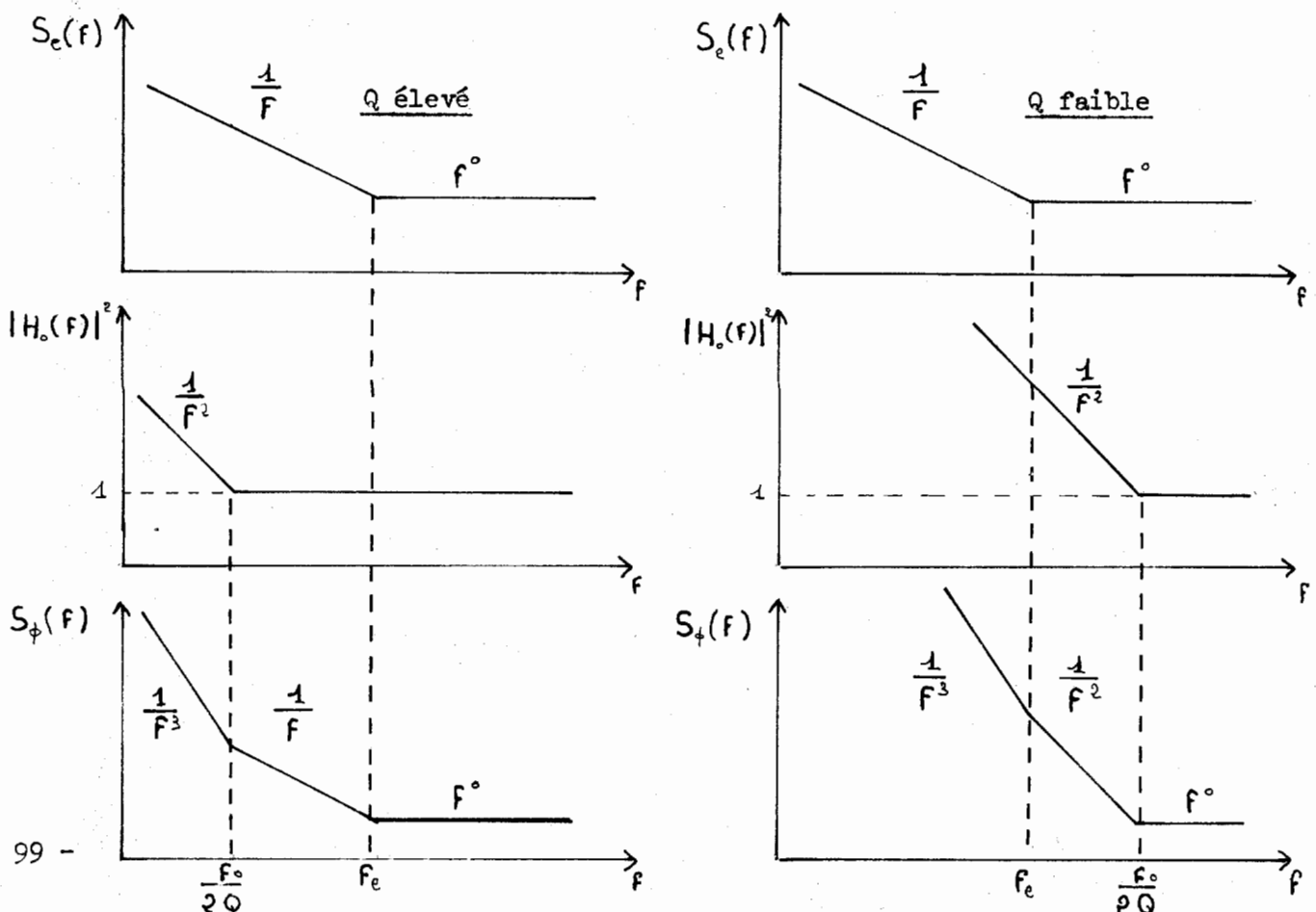
- Figure 98 -

La combinaison de cette fonction de transfert et des deux termes de bruit (f^0 et f^{-1}) de l'erreur de phase permet d'obtenir les quatre composantes généralement rencontrées dans les densités spectrales des fluctuations de phase des oscillateurs :

(160)

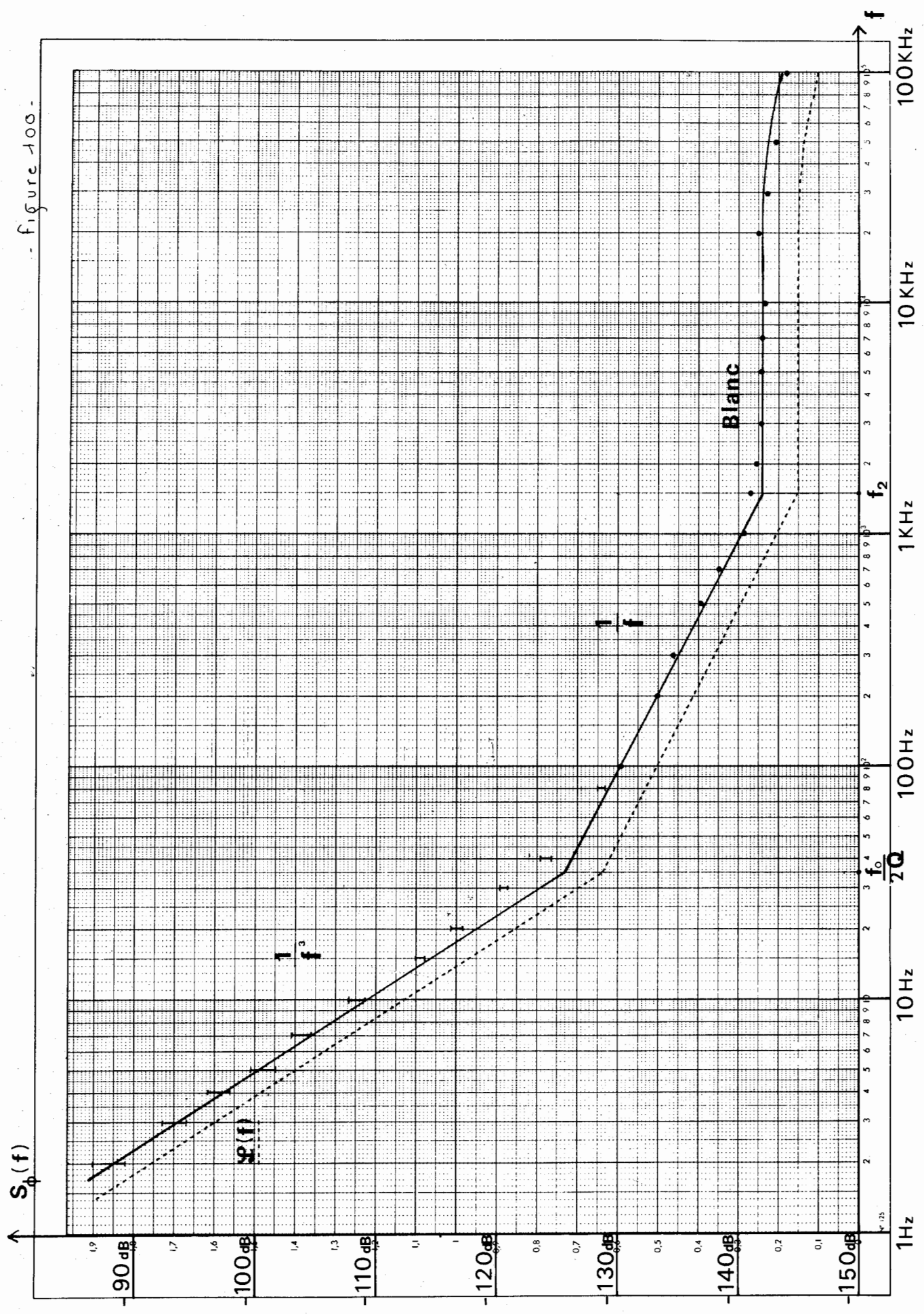
$$S_{\phi}(f) = \frac{K_3}{f^3} + \frac{K_2}{f^2} + \frac{K_1}{f} + K_0$$

a) Les oscillateurs à quartz ayant un coefficient de qualité élevé, l'inégalité $\frac{f_0}{2Q} < f_e$ est toujours vérifiée. La densité spectrale $S_{\phi}(f)$ de ces oscillateurs comporte alors les trois pentes f^{-3} , f^{-1} et f^0 . (Figure 99).



- Figure 99 -

- figure 100 -

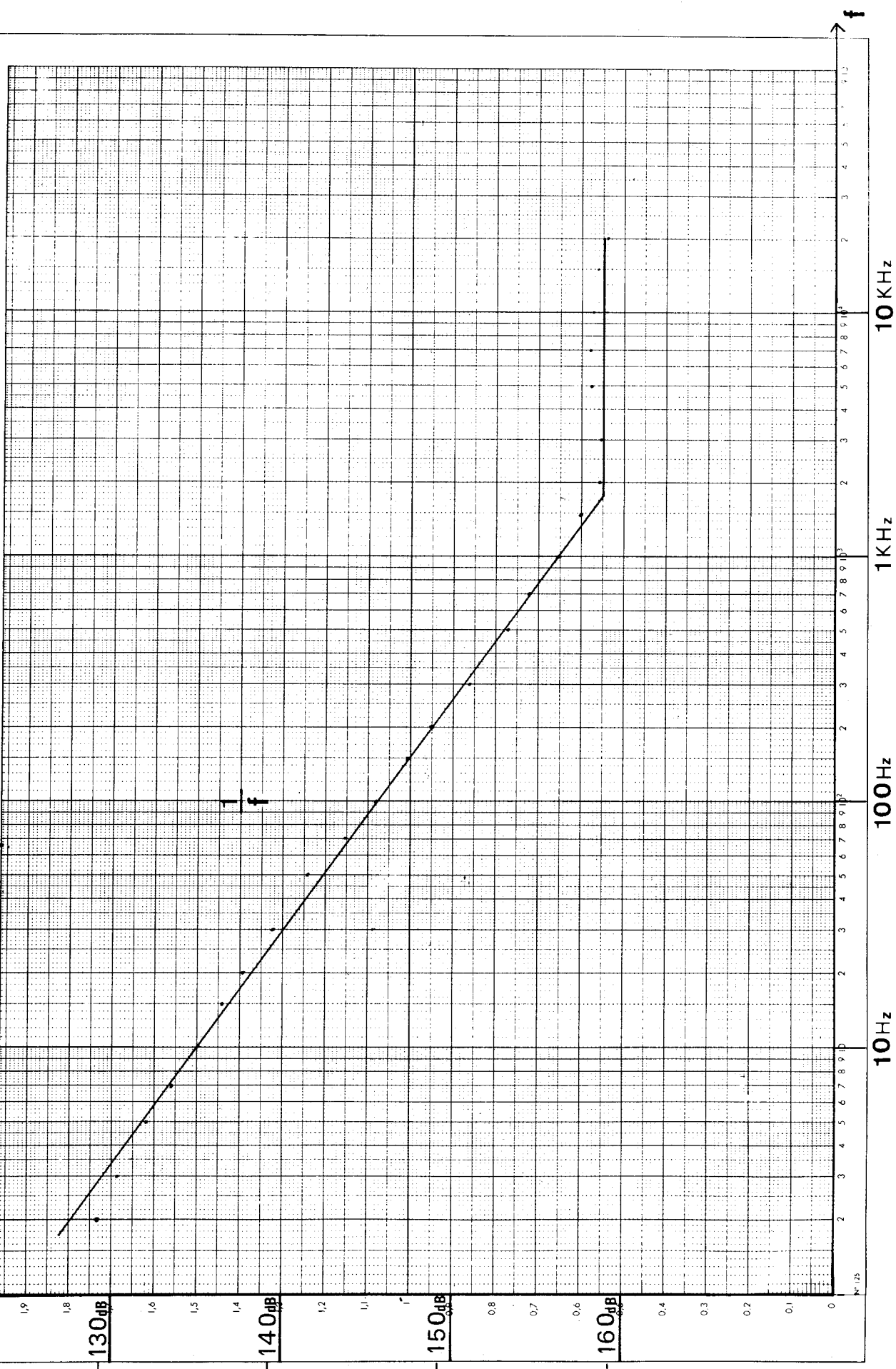


pilote à quartz 10 MHz

$\uparrow m(f)$

bruit d'amplitude

- figure 101 -



b) La densité spectrale $S_{\phi}(f)$ des oscillateurs à coefficient de qualité peu élevé (Ex : VCO) comporte les pentes f^{-3} , f^{-2} et f^0 (figure 99). Les mesures effectuées sur les pilotes à quartz permettent de vérifier la loi théorique prévue. La figure (100) représente $S_{\phi}(f)$ pour un pilote à quartz 10 MHz ; les mesures expérimentales obéissent à la loi :

$$(161) \quad S_{\phi}(f) = \frac{10^{-8}}{f^3} + \frac{10^{-11}}{f} + 56 \cdot 10^{-15}$$

$$\mathcal{L}(f) = \frac{1}{2} S_{\phi}(f) = \frac{5 \cdot 10^{-9}}{f^3} + \frac{5 \cdot 10^{-12}}{f} + 2,8 \cdot 10^{-15}$$

On peut en déduire le coefficient de qualité en charge du résonateur :

$$\frac{f_0}{2Q} = 40 \text{ Hz}, f_0 = 10 \text{ MHz} \text{ soit } Q = 1,4 \cdot 10^5.$$

L'asservissement nécessaire pour maintenir la quadrature, doit avoir une bande passante inférieure à la plus petite fréquence mesurée (< quelques Hz). (Voir le § III sur les asservissements).

La figure (101) représente le spectre du bruit d'amplitude $M(f)$ de ce pilote. Deux types de bruit prédominent : le bruit de scintillation et le bruit blanc. Le bruit d'amplitude est de 10 à 20 dB inférieur au bruit de phase.

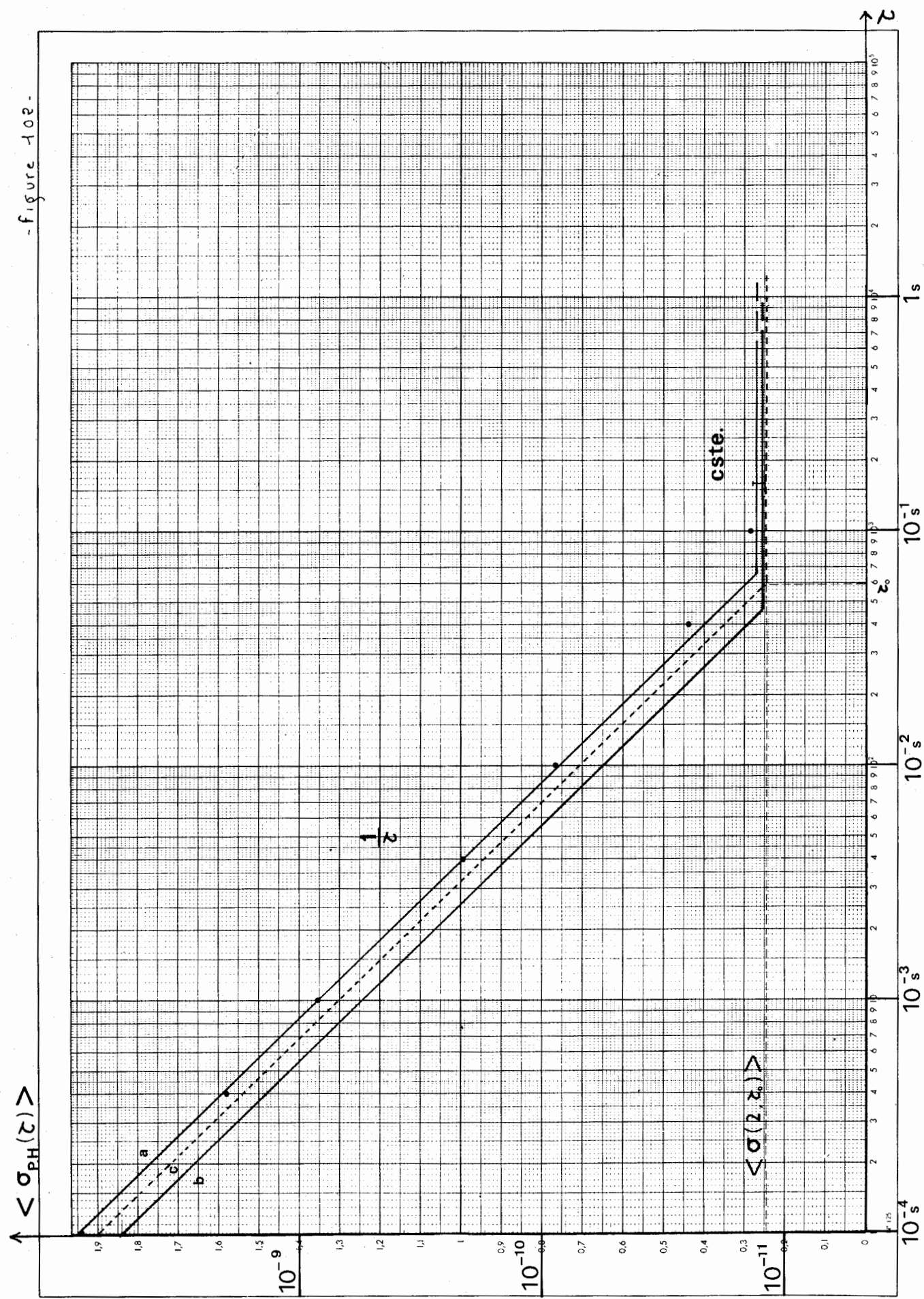
II.2 - Domaine temps

Dans le domaine fréquence, seule la méthode de démodulation des fluctuations de phase possède une dynamique suffisante pour la mesure du spectre des oscillateurs de haute qualité. Au contraire, la variance d'Allan, paramètre caractéristique du domaine temps, peut être estimée par trois processus de mesure différents.

1- La variance "passe-haut" $\langle \sigma_{PH}(\tau) \rangle$.

La courbe a, figure(102), représente $\langle \sigma_{PH}(\tau) \rangle$ pour le pilote à quartz 10 MHz étudié précédemment. Les lois de variations sont en accord avec la théorie : la loi en τ^{-1} correspond aux bruits blanc et flicker de phase (voir le tableau VI) ; le palier correspond au bruit flicker de fréquence. Rappelons que le passage des mesures de $S_{\phi}(f)$ à celles de $\langle \sigma_{PH}(\tau) \rangle$ se fait par simple commutation du filtre d'analyse, sans aucune autre manipulation sur le banc de mesure. La fréquence minimale des filtres utilisés étant de 0,3 Hz, le temps d'analyse maximum est limité à une seconde.

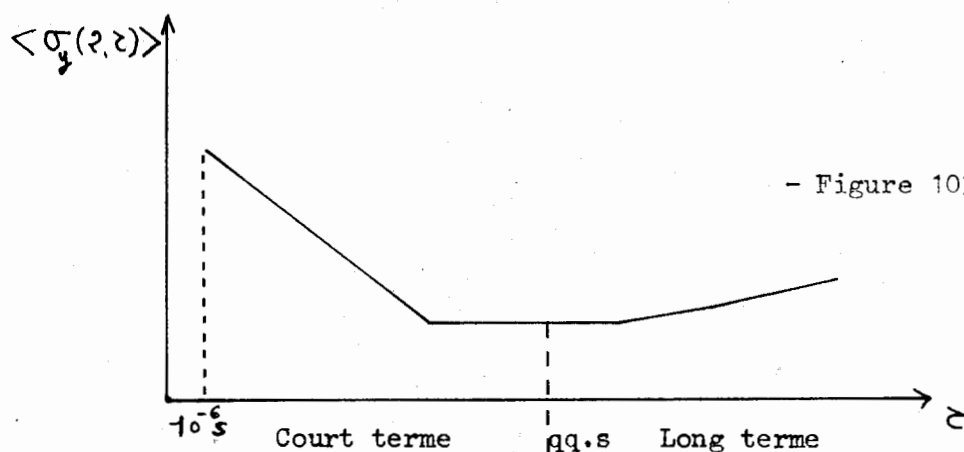
- figure 102 -



2- Variance d'Allan par comptage de fréquence.

Cette méthode, exigeant un appareillage spécifique coûteux, présente peu d'intérêt pour les durées $\tau < 1s$; la variance "passe-haut" est plus performante dans ce domaine de durée de mesure (grâce à la possibilité d'analyse en temps réel, à des durées totales de mesure T plus courtes (chapitre III) et à une durée minimale $\tau_m = 10^{-6}s$).

En outre, la bande passante f_H de ce banc de mesure est toujours très mal connue et le temps mort entre les mesures introduit un biais. Les mesures dans le domaine temps deviennent indispensables pour des durées $\tau >$ quelques secondes, domaine dans lequel apparaissent les phénomènes instationnaires : (dérive de la fréquence centrale), la variance d'Allan est alors une fonction croissante de τ .



- Figure 103 -

Estimateur : variance "passe-haut" | Variance d'Allan (comptage)

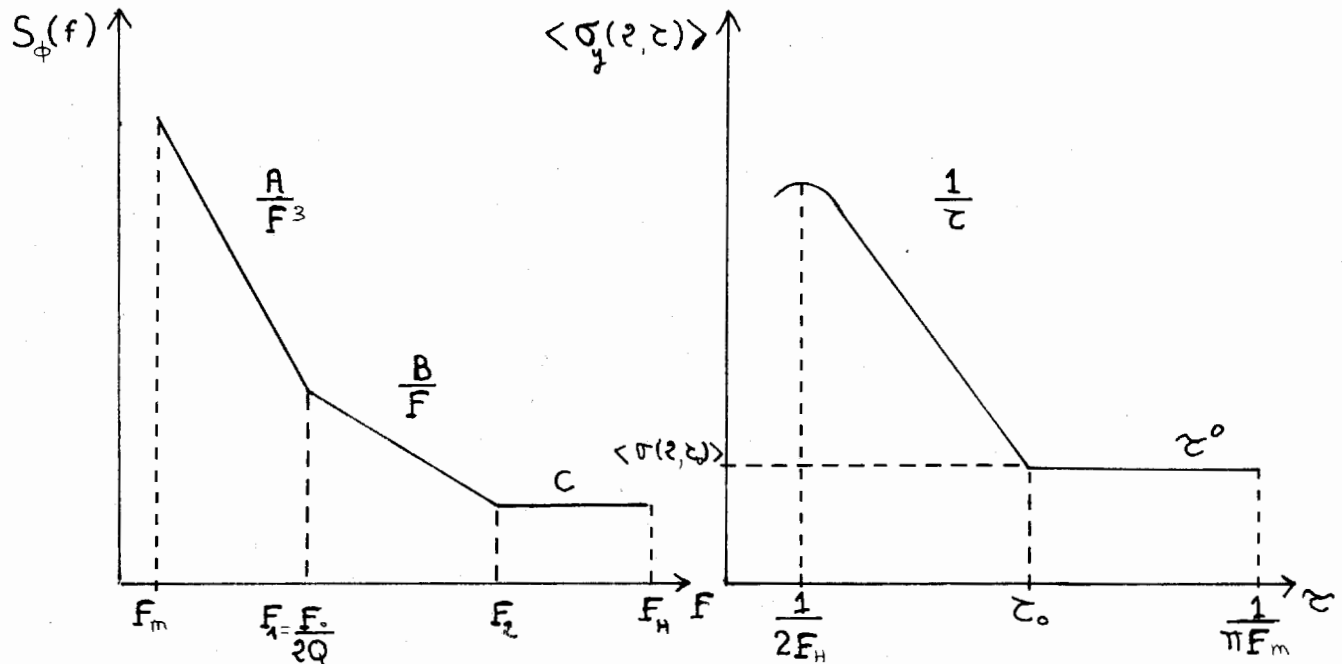
3- Détermination de $\langle \sigma(2, \tau) \rangle$ d'après la densité spectrale $S_\phi(f)$.

Tous les moments du second ordre peuvent être déterminés d'après la densité spectrale $S_\phi(f)$ (voir chapitre I).

Nous avons rappelé dans le tableau VI les lois de variations de $\langle \sigma(2, \tau) \rangle$ en fonction des différentes composantes spectrales $f^{-\alpha}$ de $S_\phi(f)$.

Sachant que les densités spectrales des fluctuations de phase des générateurs ultra-stables comportent trois pentes : f^{-3} , f^{-1} et f^0

(on considère la bande passante f_H grande, voir figure 104), la variance d'Allan de ces générateurs doit donc présenter une partie en τ^{-1} et un palier.



- Figure 104 -

La variance d'Allan sera entièrement déterminée, dans le domaine $(\frac{1}{2f_H}, \frac{1}{\pi f_m})$, par les valeurs τ_0 et $\langle \sigma(2, \tau_0) \rangle$ (figure 104).

Détermination de τ_0 et $\langle \sigma(2, \tau_0) \rangle$:

$$S_{\phi}(f) = \frac{A}{F^3} + \frac{B}{F} + C \quad \text{avec} \quad \begin{cases} F_1 = \frac{F_0}{2Q} = \sqrt{\frac{A}{B}} \\ F_2 = \frac{B}{C} \end{cases}$$

$$S_{\phi}(f) = 4\pi^2 F^2 S_{\phi}(f) = \frac{4\pi^2 A}{F} + 4\pi^2 B F + 4\pi^2 C F^2 \quad F_m \leq F \leq F_H$$

$$(162) \quad \langle \sigma^2(\tau, \tau) \rangle = \langle \sigma_{f^{-1}}^2(\tau, \tau) \rangle + \langle \sigma_f^2(\tau, \tau) \rangle + \langle \sigma_{f^2}^2(\tau, \tau) \rangle$$

Le tableau donne alors :

$$(163) \quad \begin{aligned} \langle \sigma^2(\tau, \tau) \rangle &= \frac{4\pi^2}{\omega_0^2} \left[2A \ln 2 + \frac{B}{4\pi^2} \left(\frac{9}{2} + 3 \ln(2\pi\tau F_H) - \ln 2 \right) + \frac{3CF_H}{4\pi^2\tau^2} \right] \\ \langle \sigma(\tau, \tau) \rangle &= \frac{2\pi}{\omega_0} \left[2A \ln 2 + \frac{1}{4\pi^2\tau^2} \left(\frac{9}{2} B + 3B \ln(2\pi\tau F_H) - B \ln 2 + 3CF_H \right) \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$(164) \quad a) \quad \langle \sigma(\tau, \tau_0) \rangle = (2 \ln 2)^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{A}}{F_0} \quad \text{avec} : \frac{\sqrt{A}}{F_0} = \frac{\sqrt{B}}{2Q}$$

$$(165) \quad \text{donc} \quad \langle \sigma(\tau, \tau_0) \rangle = 0,59 \frac{\sqrt{B}}{Q} \quad \text{le niveau du palier est inversement proportionnel au coefficient de qualité de l'oscillateur (en considérant}$$

le niveau du bruit de scintillation (f^{-1}) prenant naissance dans la boucle oscillatrice, comme indépendant du coefficient de qualité).

$$b) \quad A 2 \ln 2 = \frac{1}{4\pi^2 \tau^2} \left[\frac{9}{2} B + 3B \ln(2\pi \tau f_H) - B \ln 2 + 3C F_H \right]$$

$$(166) \quad \tau_o = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{9}{4 \ln 2} \cdot \frac{B}{A} + \frac{3 \ln(2\pi \tau f_H)}{2 \ln 2} \cdot \frac{B}{A} - \frac{B}{2A} + \frac{3 F_H}{2 \ln 2} \cdot \frac{C}{A} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$(167) \quad \tau_o = \frac{1}{2\pi F_1} \left[274 + 216 \ln(2\pi \tau f_H) + 216 \frac{F_H}{F_2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\tau_o = \frac{0,234}{F_1} \left[X(\tau_o, f_H) + \frac{F_H}{F_2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad X(\tau_o, f_H) = 127 + \ln(2\pi \tau f_H)$$

Les valeurs de $X(\tau_o, f_H)$ sont reportées sous forme de courbes (figure 105) pour $f_H = 1, 10, 100$ kHz et $10^{-2} < \tau < 10$ s.

Pour chaque valeur de f_H , on calcule $\tau_{o \min}$ avec $X(10^{-2}, f_H)$ et $\tau_{o \max}$ avec $X(10, f_H)$. Les valeurs de $\tau_{o \min}$ et $\tau_{o \max}$ permettent de déterminer avec précision, en reportant dans la relation (167) la valeur :

$$X\left(\frac{\tau_{o \max} + \tau_{o \min}}{2}, f_H\right).$$

Exemple :

Pour le pilote à quartz 10 MHz précédemment mesuré :

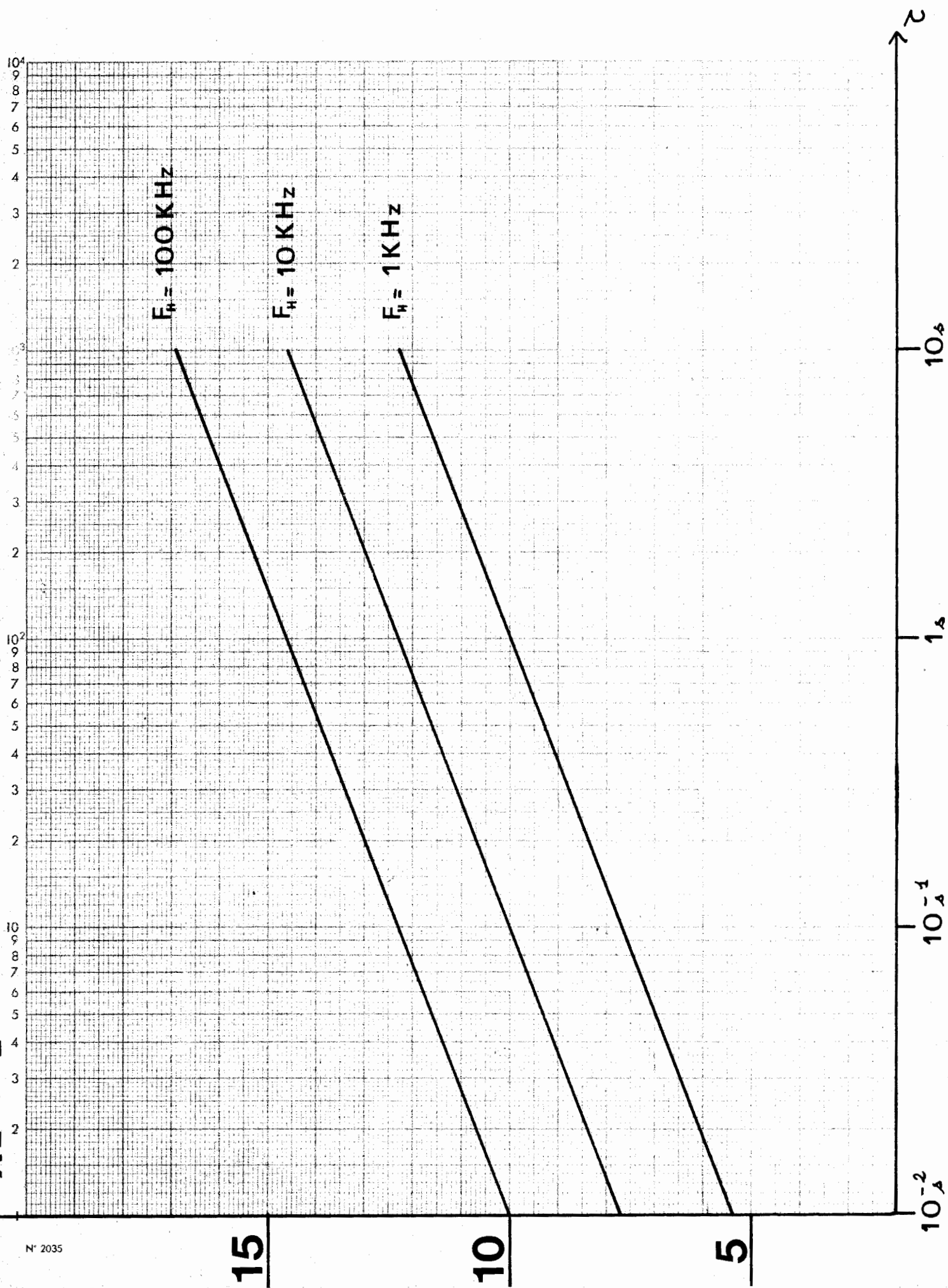
$$\begin{cases} f_1 = 35 \text{ Hz.} \\ f_2 = 1,5 \text{ kHz.} \end{cases}$$

Pour $f_H = 100$ kHz

$$\begin{cases} \tau_{o \max} = 6,1 \cdot 10^{-2} \\ \tau_{o \min} = 5,8 \cdot 10^{-2} \end{cases} \quad X\left(\frac{6,1+5,8}{2} \cdot 10^{-2}, 100 \text{ kHz}\right) = 1,1$$

$$(168) \quad \begin{cases} \tau_o = \frac{0,234}{35} \left[11,9 + \frac{100 \cdot 10^3}{1,5 \cdot 10^3} \right]^{\frac{1}{2}} = 5,9 \cdot 10^{-2} \\ \langle \sigma(2, \tau) \rangle = \left[\frac{7,4 \cdot 35 \sqrt{1,5 \cdot 10^3 \cdot 5,6 \cdot 10^{-15}}}{2 \cdot 3,14 \cdot 10^3} \right] = 12 \cdot 10^{-11} \end{cases}$$

Les résultats ainsi obtenus et ceux de la variance "passe-haut"



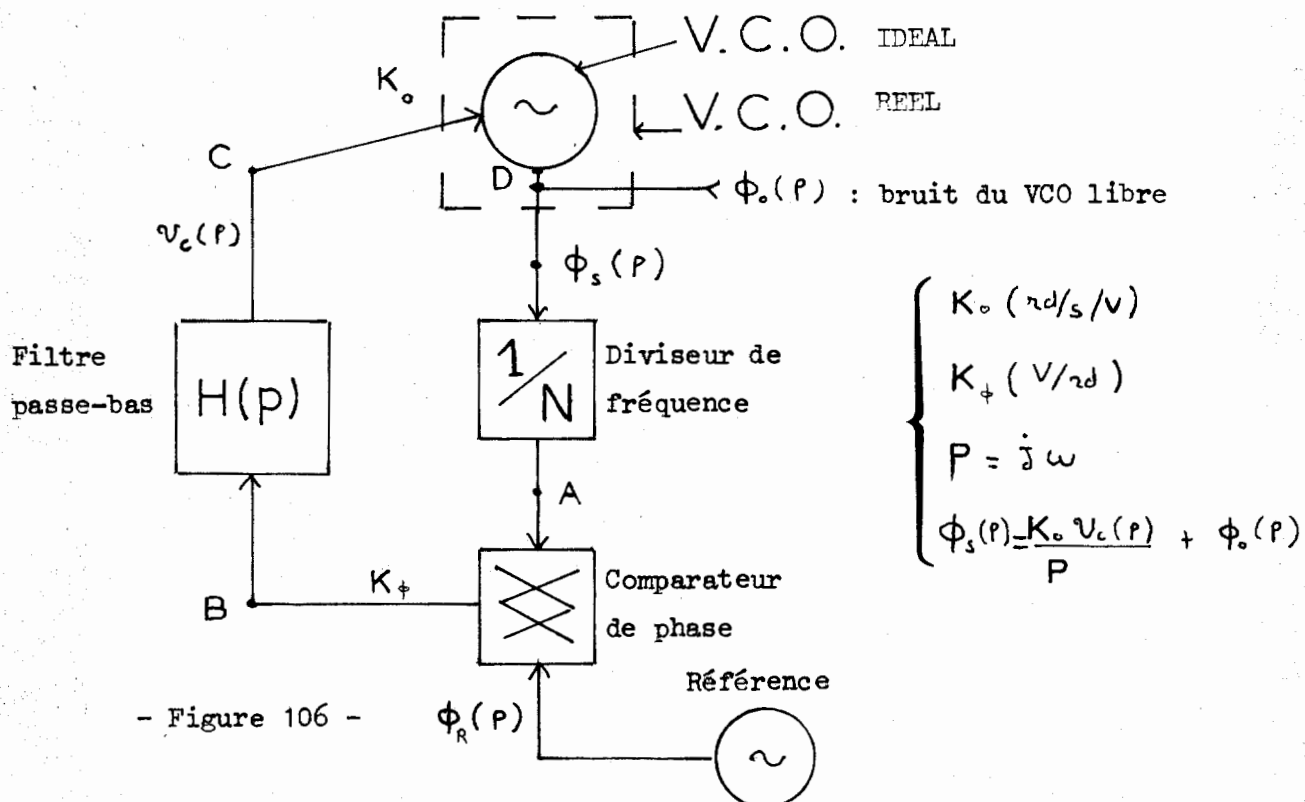
(les coefficients de biais ayant été appliqués) coïncident avec une bonne précision. Cette méthode permet de déterminer rapidement la variance d'Allan des générateurs ultra-stables, quand $f_H \gg f_1$, c'est à dire quand les bruits blanc et flicker de phase non filtrés donnent une pente τ^{-1} .

III - MESURE DE V.C.O. (Voltage Control Oscillator)

Les pilotes à quartz sont des oscillateurs de grande stabilité, aussi bien à court terme qu'à long terme, mais ne fonctionnant qu'à une fréquence presque constante (un réglage fin de leur fréquence pouvant être obtenu avec une varicap d'accord). Ils sont souvent utilisés comme références, et peuvent servir à piloter, par exemple, des oscillateurs du type V.C.O. (voltage controlled oscillator) dont la fréquence est commandée par une tension, la variation de fréquence pouvant atteindre l'octave. Les V.C.O. présentent des coefficients de qualité beaucoup moins importants que les pilotes à quartz (10^3 à 10^4 plus faible), d'où leur manque de stabilité. Pour mesurer leurs densités spectrales, il faut les asservir dans une bande large ; sachant que l'asservissement filtre les fluctuations de phase, il est nécessaire d'étudier la nature de ce filtrage. Réf (29)

1- Asservissement - boucle de phase

Nous allons étudier la modification de la densité spectrale $S_{\phi_0}(f)$ d'un VCO asservi sur une référence $S_{\phi_R}(f)$.



Les fluctuations de phase à la sortie du VCO sont divisées par N :

$$\Phi_R(p) = \frac{1}{N} \Phi_S(p)$$

La tension de sortie du comparateur est proportionnelle à la différence de phase des deux voies :

$$V_B(p) = K_d \left(\Phi_R(p) - \frac{\Phi_S(p)}{N} \right)$$

Cette tension est filtrée et appliquée sur la varicap de commande de fréquence du VCO :

$$V_C(p) = H(p) K_v \left(\Phi_R(p) - \frac{\Phi_S(p)}{N} \right)$$

$$\Phi_D(p) = K_o K_v \frac{H(p)}{p} \left(\Phi_R(p) - \frac{\Phi_S(p)}{N} \right)$$

Le système étant bouclé, les fluctuations du VCO réel sont données par $\phi_s(p)$:

$$(169) \quad \phi_s(p) = K_o K_v \frac{H(p)}{p} \left(\phi_R(p) - \frac{\phi_s(p)}{N} \right) + \phi_o(p)$$

en posant $K = \frac{K_o K_v}{N}$, on obtient :

$$(170) \quad \phi_s(p) = \left(\frac{p}{p + K H(p)} \right) \cdot \phi_o(p) + \left(\frac{N K H(p)}{p + K H(p)} \right) \cdot \phi_R(p)$$

$$(171) \quad \text{soit :} \quad S_{\phi_s}(f) = |H_o(f)|^2 \cdot S_{\phi_o}(f) + |H_R(f)|^2 \cdot S_{\phi_R}(f)$$

Les fonctions de transfert $H_o(f)$ et $H_R(f)$ ont été calculées en annexe pour des boucles du 1er et 2ème ordre. ($H_o(f)$ est représentée figure 107). La fonction de transfert $|H_R(f)|^2$ correspond à un filtrage "passe-bas" dont la fréquence de coupure est :

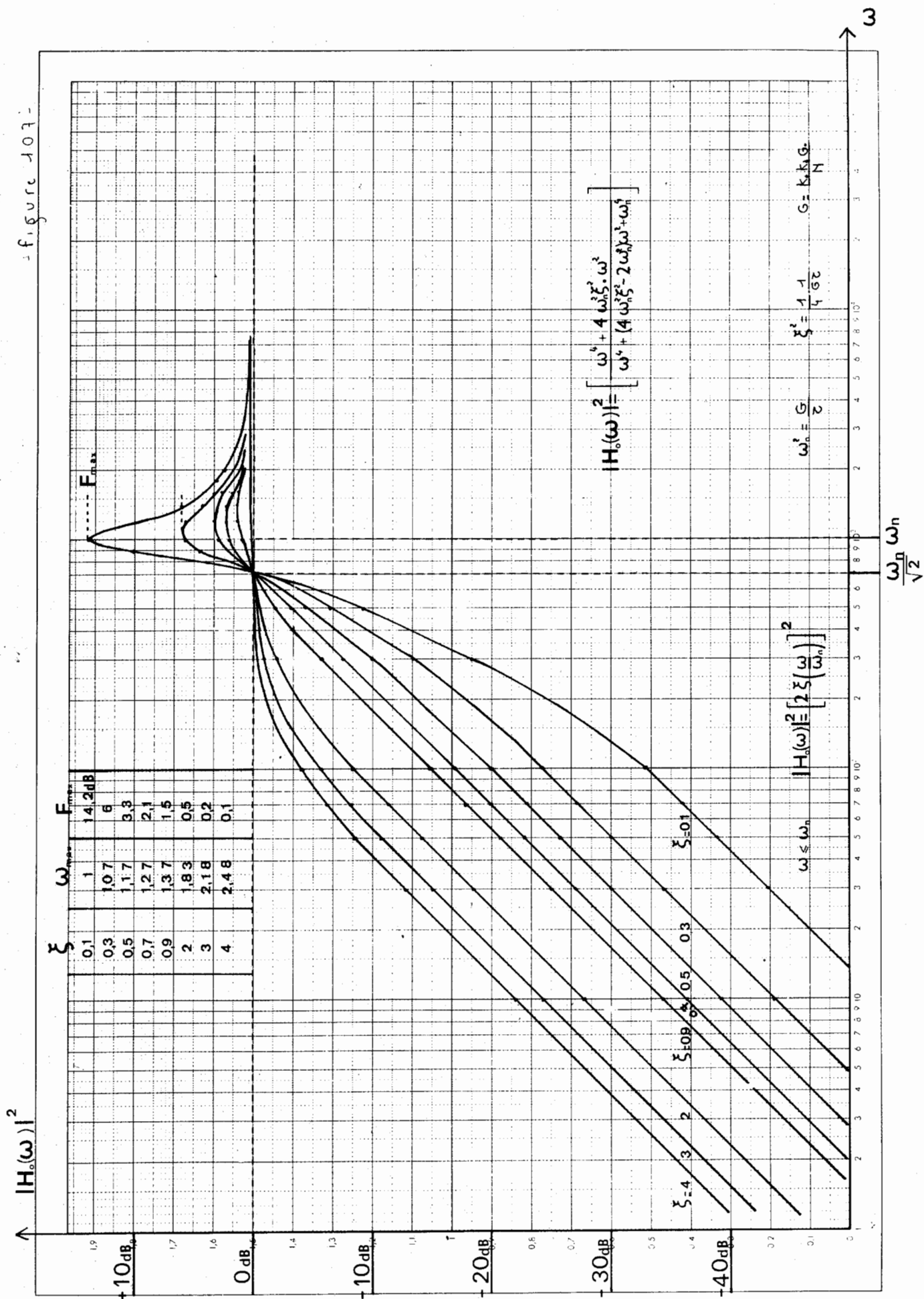
$$(172) \quad F_{n1} = \frac{K_o K_v G}{2 \pi N} \quad (1^\circ \text{ ordre})$$

$$\text{ou} \quad F_{n2} = \sqrt{\frac{K_o K_v G}{2 \pi N}} \quad (2^\circ \text{ ordre})$$

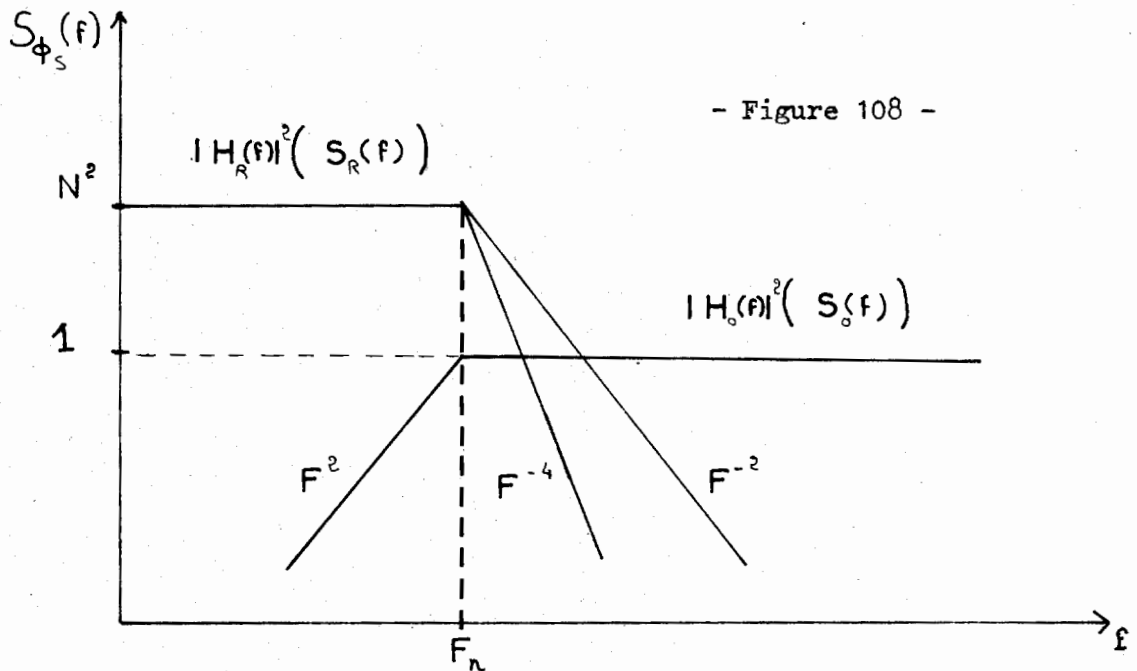
la pente est F^{-1} (1° ordre) ou F^{-2} (2° ordre)

et le gain est égal à : N^2 .

-figure 107-



La fonction de transfert $|H_o(f)|^2$ correspond à un filtrage "passe-haut" dont la fréquence de coupure est f_{n1} ou f_{n2} , la pente f^{-2} (1er et 2ème ordre) et le gain : 1.



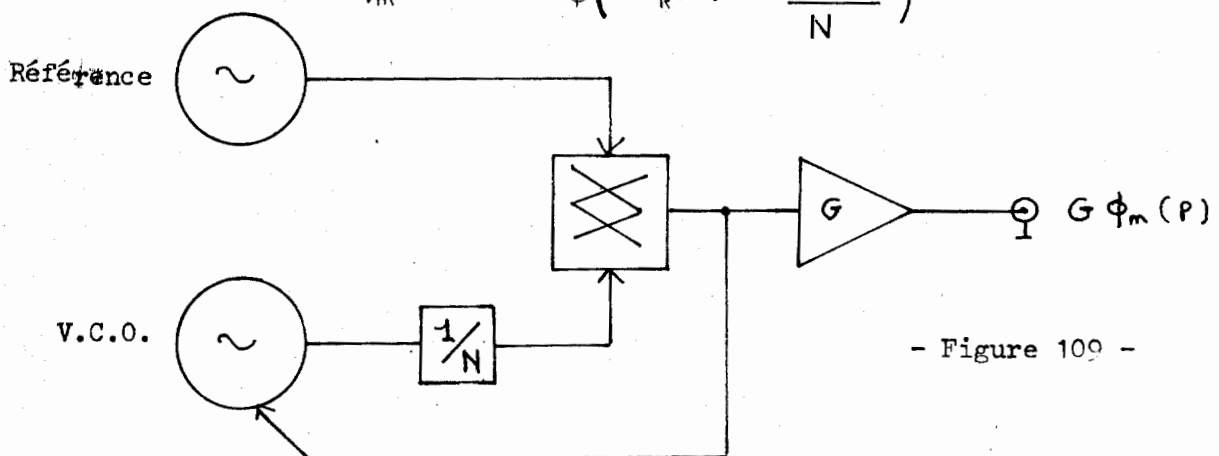
Il ne faut pas considérer f_n comme une limite séparant le bruit de la référence ($f < f_n$) et le bruit du VCO ($f > f_n$). En effet, même filtrées et atténuées, les fluctuations du VCO libre peuvent être plus importantes que celles de la référence sur une certaine plage de fréquence.

Celle-ci prédomine au dessous d'une fréquence (f_R) qui peut être beaucoup plus petite que f_n : sur l'exemple de la figure (110), $f_n = 40$ kHz et $f_R = 1$ Hz ($\xi = 2$) et 5 Hz ($\xi = 1$).

2- Réalisation des mesures

Les fluctuations de phase sont mesurées à la sortie du comparateur :

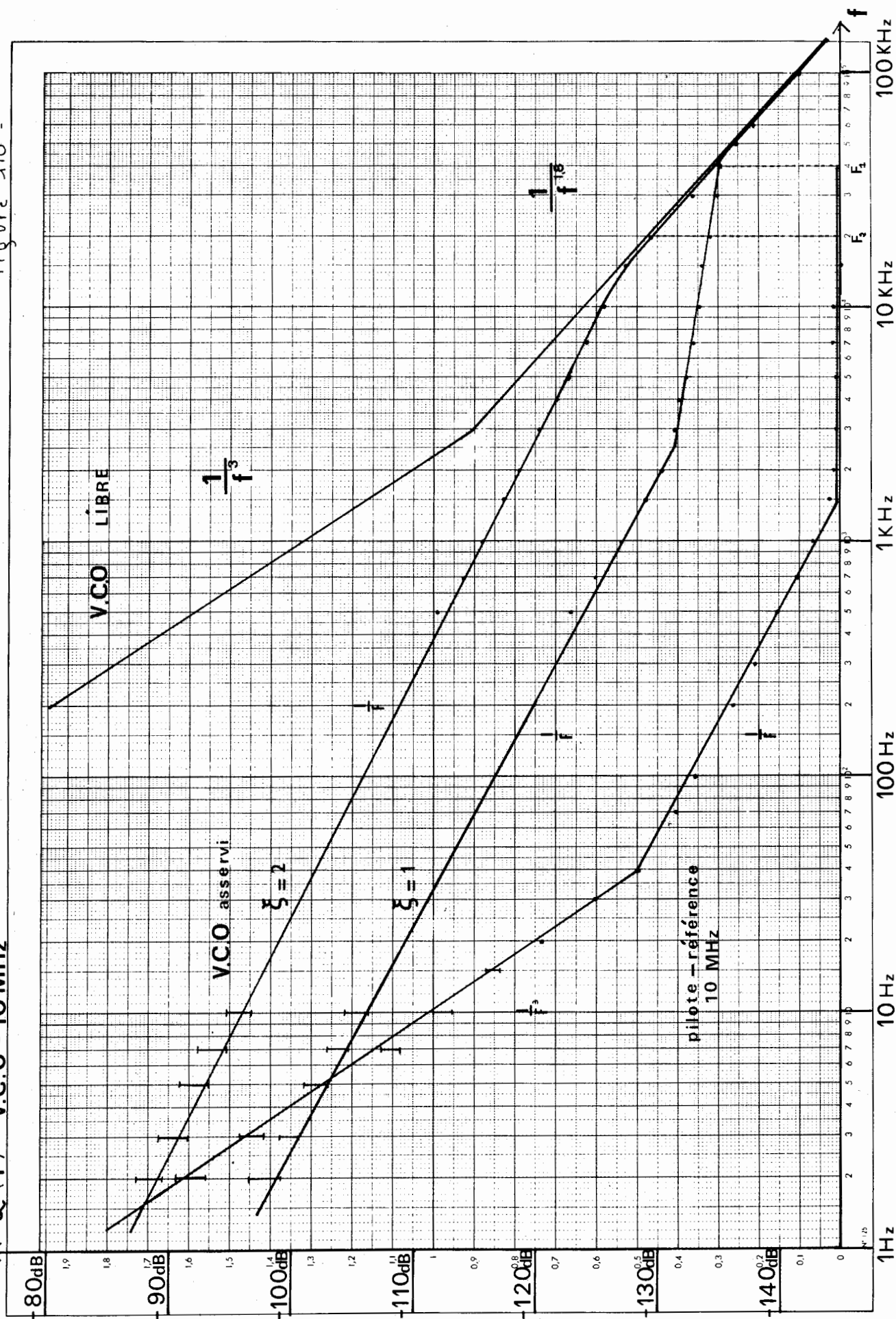
$$\phi_m(p) = K_\phi \left(\phi_R(p) - \frac{\phi_s(p)}{N} \right)$$



- Figure 109 -

$\Delta \mathcal{L}(f)$ V.C.O - 10 MHz

- figure 110 -



$$(173) \quad S_{\phi_m}(f) = \frac{K_{\phi}^2}{N^2} |H_o(f)|^2 S_{\phi_o}(f) + K_{\phi}^2 \left| \frac{H_o(f)}{N} - 1 \right|^2 S_{\phi_R}(f)$$

Les fluctuations de phase de la référence étant filtrées, deviennent négligeables :

$$(174) \quad S_{\phi_m}(f) = \frac{K_{\phi}^2}{N^2} |H_o(f)|^2 S_{\phi_o}(f)$$

Remarque :

$\left\{ \begin{array}{l} f < f_n : S_{\phi_m}(f) \text{ est proportionnelle à la densité spectrale des fluctuations de fréquence du VCO libre } S_{\phi_o}(f). \\ f > f_n : S_{\phi_m}(f) \text{ est proportionnelle à } S_{\phi_o}(f). \end{array} \right.$

Les paramètres de la boucle d'asservissement étant connus, on détermine $\frac{K_{\phi}^2}{N^2} |H_o(f)|^2$ et l'on corrige ainsi la densité spectrale $S_{\phi_m}(f)$.

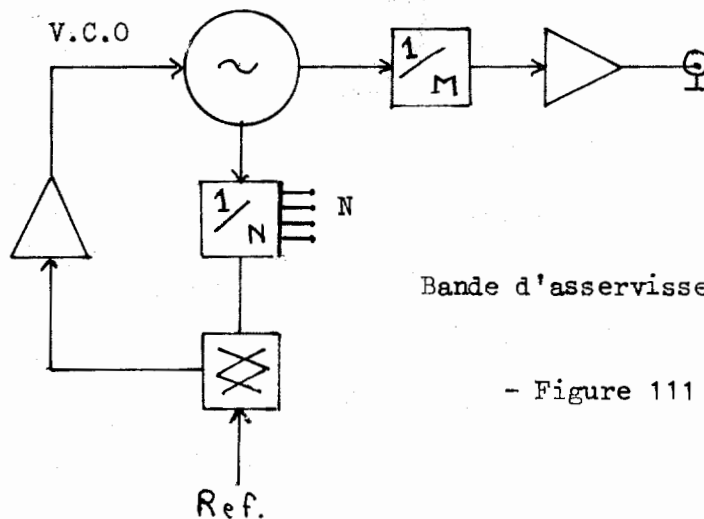
La courbe a de la figure (110) représente la densité spectrale $S_{\phi_R}(f)$ de l'oscillateur de référence (quartz 10 MHz).

Les courbes b correspondent à la mesure de $S_{\phi_m}(f)$ pour deux constantes d'asservissement ($\xi = 1, 2$) avec $f_n = 40$ kHz.

Connaissant f_n et ξ , la figure (107) permet de déterminer la fonction de correction. On obtient ainsi la courbe c donnant la densité spectrale des fluctuations de phase du VCO libre : les pentes f^{-3} ($f < 2,5$ kHz) et f^{-2} correspondent bien au modèle théorique pour des oscillateurs à faible coefficient de qualité. Dans ces mesures sur les VCO, le palier de bruit blanc devant apparaitre pour $f \geq \frac{f_o}{2Q}$ n'a pas été observé.

Il semble donc nécessaire d'approfondir le calcul de la fonction de transfert de la boucle oscillatrice en considérant différents schémas d'oscillateurs, le modèle $\left\{ 1 + \left(\frac{f_o}{2Qf} \right)^2 \right\}$ n'étant peut être pas général.

Le VCO, précédemment mesuré, a été utilisé dans un synthétiseur :



Bande d'asservissement : $f_n \leq 100$ Hz

- Figure 111 -

Analyseur de spectre
6303

Tête d'analyse	Appareil	N° de série	Signal analysé	Fréquence F_0	Dispersion / div.	Date	Observations
60 MHz 6303-1	Synthesiseur			1 MHz	100 Hz (Δ)		
11 MHz 6303-2					500 Hz (V)		

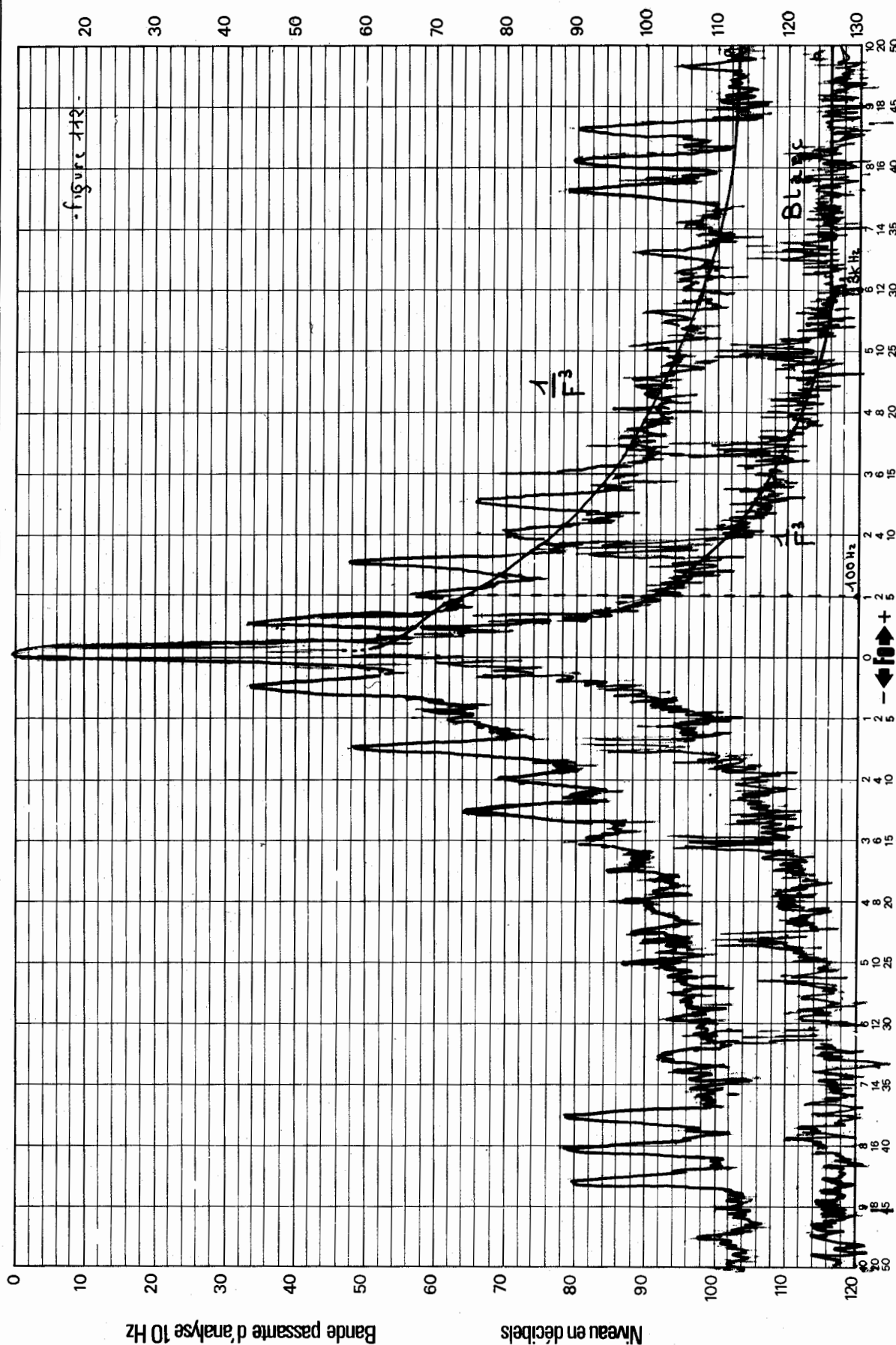


figure 112 -

Composantes aléatoires ramenées dans une bande de 1Hz (niveau en dB)

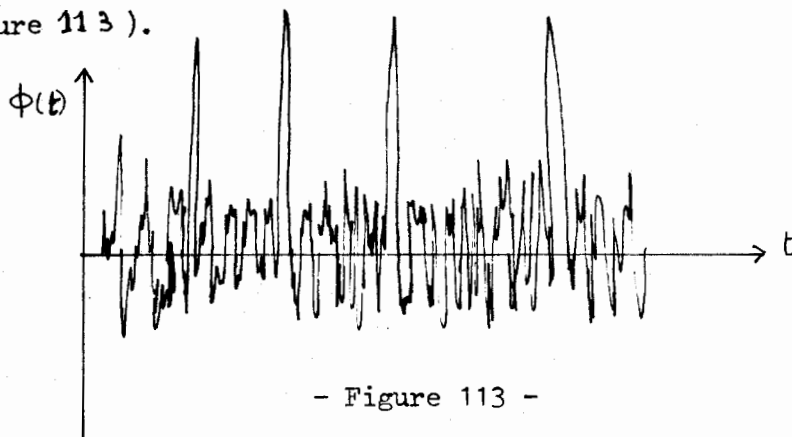
Le spectre R.F. du signal de sortie est représenté figure (112) .

- { Pour $f \leq f_n = 100$ Hz, les bandes latérales sont dues aux fluctuations de phase filtrées du VCO.
Pour $100 \text{ Hz} \leq f \leq 3 \text{ kHz}$, le spectre est donné par le spectre $\mathcal{L}(f)$ du VCO libre.
Pour $3 \text{ kHz} \leq f$, le bruit blanc est introduit par les circuits de sortie.

IV - INTERET DU BANC DE MESURE POUR DES GENERATEURS A GRANDE PURETE SPECTRALE (ex : Synthétiseur).

Bien qu'il existe un analyseur de spectre à grande dynamique permettant de mesurer le spectre RF de «générateurs», il faut noter trois avantages de la méthode de démodulation des fluctuations de phase (ou d'amplitude).

- a) L'analyseur de spectre classique permet de caractériser la pureté spectrale (celle-ci incluant toutes les perturbations: bruit de phase, bruit d'amplitude), alors que la méthode de démodulation permet des mesures spécifiques du bruit de phase ($\mathcal{L}(f)$, $S_{\phi}(f)$) ou bruit d'amplitude ($\mathcal{M}(f)$).
- b) Les fluctuations de phase ou d'amplitude peuvent être visualisées sur un oscilloscope. On a ainsi une représentation temporelle des perturbations affectant la fréquence porteuse. Cette visualisation permet de détecter certaines anomalies de fonctionnement. Cette remarque s'applique aussi aux générateurs ultra-stables : la variance d'Allan d'un pilote à quartz, ayant été mesurée avec un fréquencemètre-calculateur, présentait des valeurs anormalement élevées pour $\tau >$ quelques secondes. Aucune conclusion ne pouvait être donnée sur la nature de ce défaut. Celui-ci a pu être mis en évidence par la visualisation des fluctuations de phase de ce pilote à quartz : la phase subissait des sauts, d'amplitude constante, et espacés de quelques secondes (figure 113).



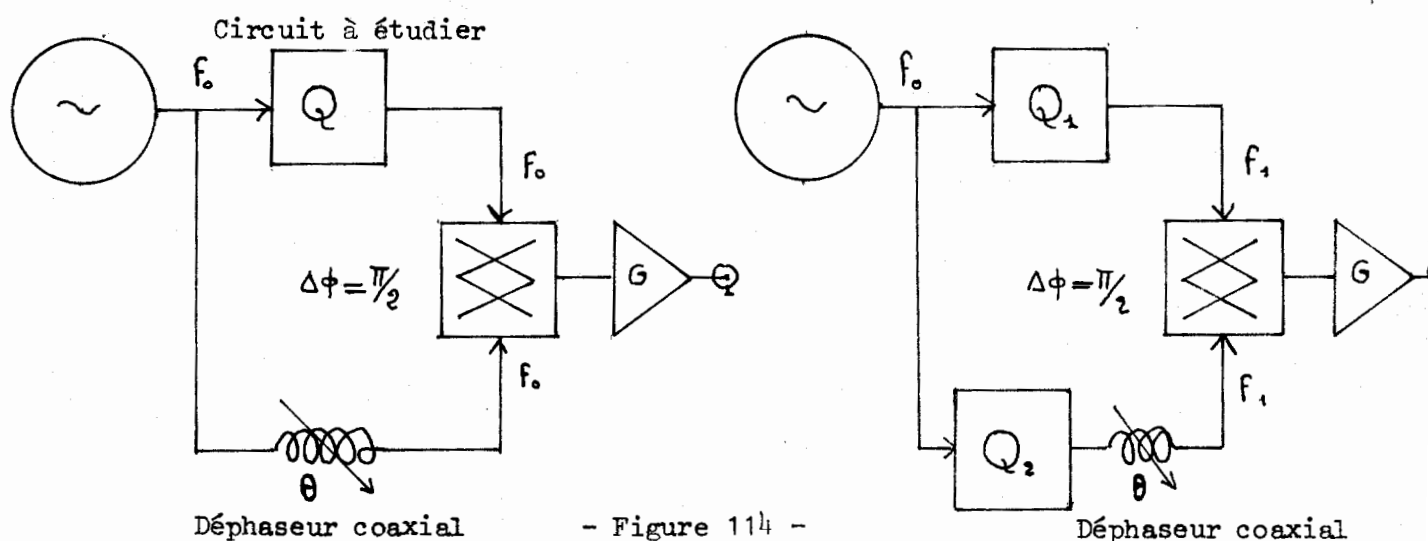
- Figure 113 -

c) Le troisième avantage est la possibilité de caractériser l'instabilité à court terme dans le domaine temps, par la mesure de la variance "passe-haut". Le cahier des charges des synthétiseurs impose le niveau des bandes latérales de bruit pour le spectre R.F. et parfois une limite supérieure pour la variance d'Allan dans une bande passante donnée. Celle-ci peut donc être mesurée sans l'utilisation d'un appareillage spécifique et onéreux incorporant un fréquencemètre-calculateur. Il est intéressant de noter que ces deux exigences (sur le spectre R.F. et la variance d'Allan) sont souvent contradictoires. Si l'on impose une limite au spectre R.F., c'est à dire à $f(f)$ donc à $S_{\phi}(f)$ (le bruit d'amplitude étant négligé), on impose aussi la variance d'Allan. Cette erreur usuelle montre la mauvaise compréhension des relations entre le domaine temps et le domaine fréquence.

V - MESURE DU BRUIT RESIDUEL DES CIRCUITS

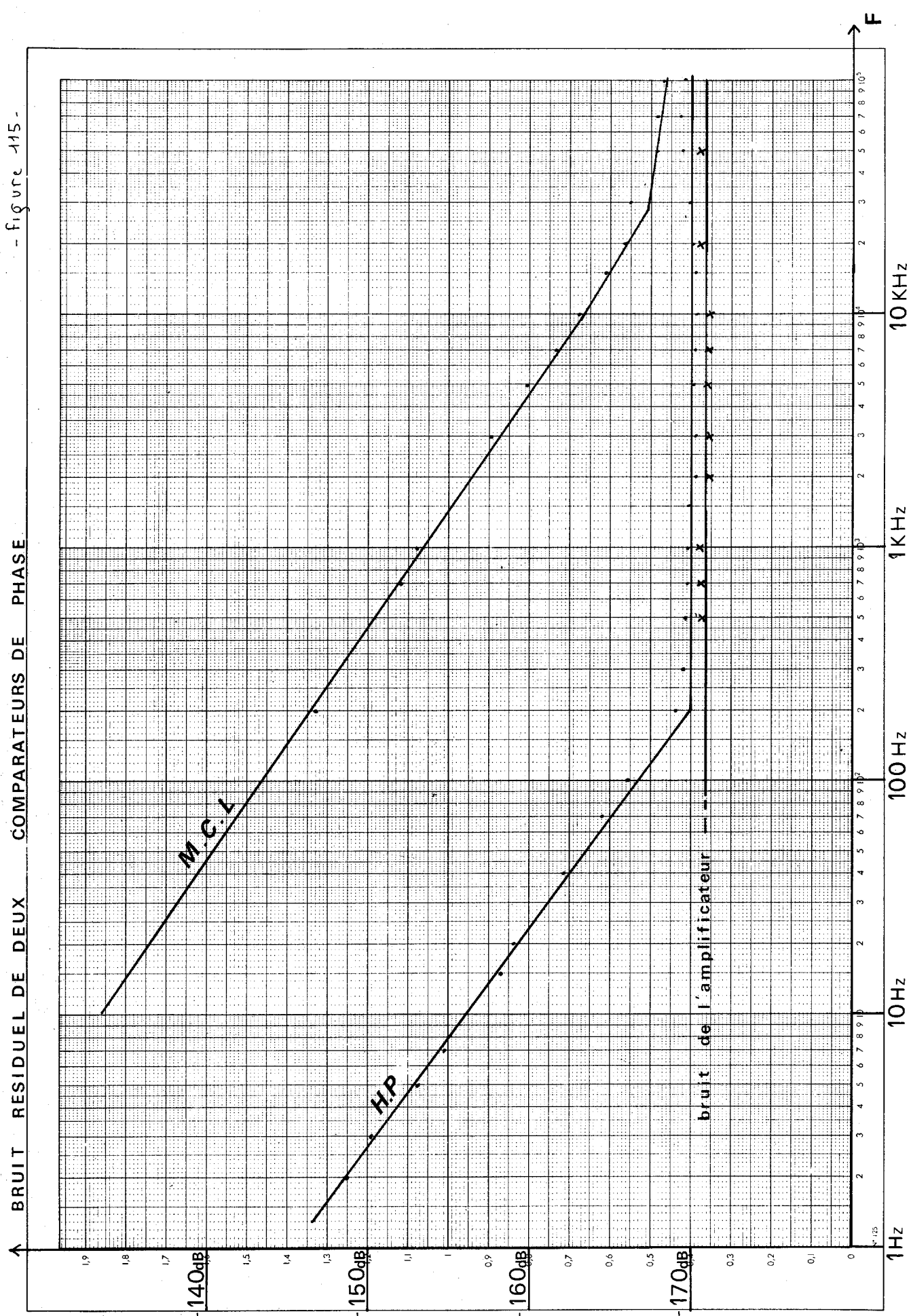
Les circuits utilisés pour l'analyse et la synthèse du signal évoluent avec la technologie; l'amélioration en bruit est l'un des buts de cette évolution. Il devient donc indispensable de disposer de méthodes de mesure suffisamment sensibles pour caractériser les performances de ces circuits. La connaissance de ce bruit résiduel est fondamentale car elle permettrait d'estimer la pureté spectrale du signal issu de générateurs aussi complexes que les synthétiseurs. Le banc de mesure permet de caractériser les oscillateurs : pilote à quartz, VCO, etc..., mais il permet aussi de mesurer le bruit résiduel de ces circuits.

La contribution, en bruit, du signal est éliminée par comparaison de phase entrée-sortie:



- figure 115 -

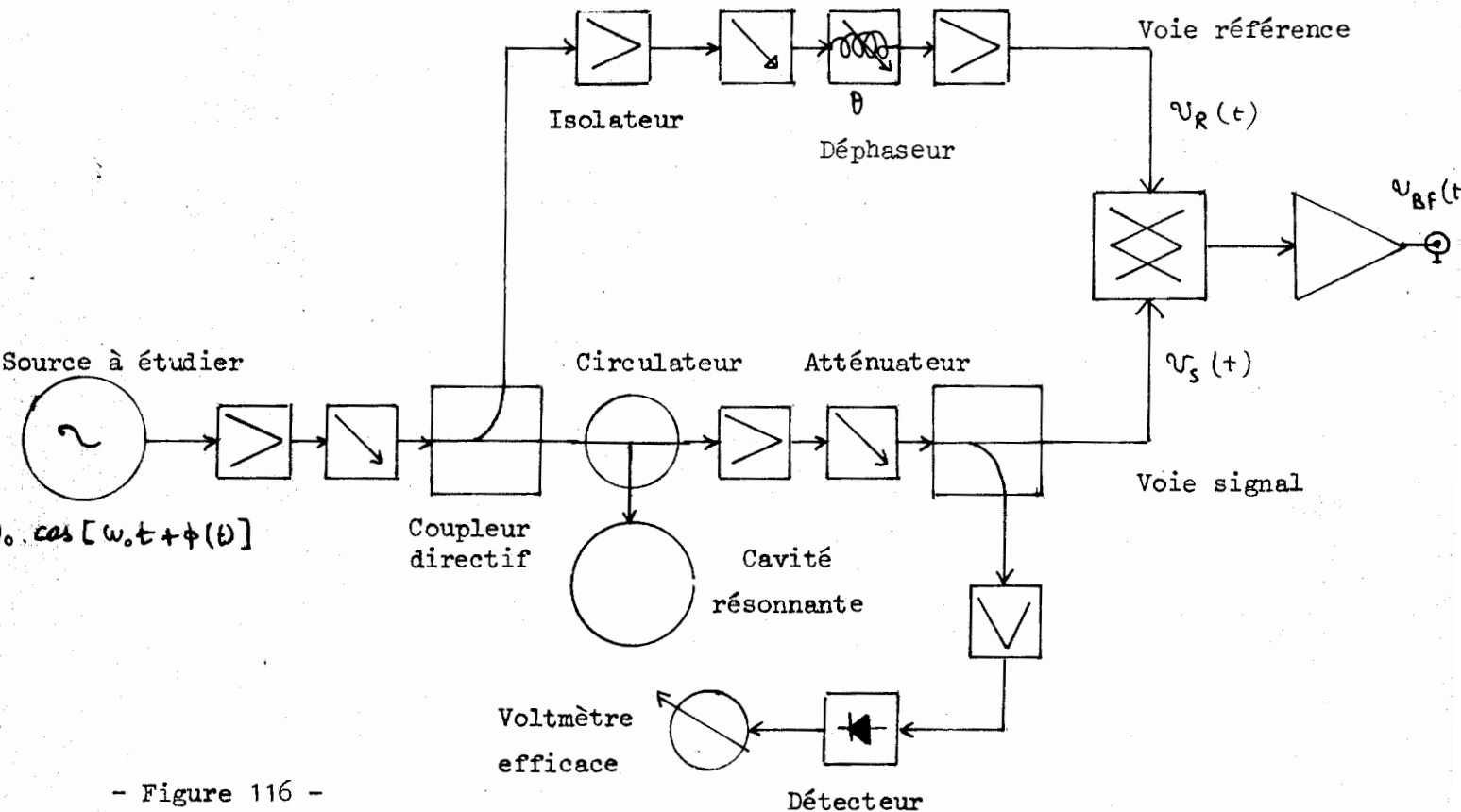
BRUIT RESIDUEL DE DEUX COMPARATEURS DE PHASE



L'utilisation d'une source ultra-stable est recommandée (voir chapitre III).
Le déphaseur (coaxial) permet d'ajuster la quadrature entre les deux voies du comparateur de phase.
La figure(115)représente le bruit résiduel des deux mélangeurs.

VI - BANC DE MESURE HYPERFREQUENCE

Dans le domaine hyperfréquence, les méthodes de démodulation des fluctuations de phase (ou de fréquence) sont plus complexes que celles précédemment décrites. Le "National Bureau of Standards" préconise le système basé sur le discriminateur de fréquence, Réf. (30-21)



- Figure 116 -

La voie référence est atténuée et déphasée : $V_R(t) = A_R \cos [\omega_0(t-\theta) + \phi(t-\theta)]$

Dans la voie signal, la puissance de la fréquence porteuse est absorbée par la cavité résonnante et les fluctuations de fréquence sont réfléchies avec un coefficient de réflexion $\Gamma(f(t)) = i \frac{Q_0}{\omega_0} \dot{\phi}(t)$ (dans la bande passante de la cavité).

La tension $V_S(t)$ est donnée par :

$$(175) \quad V_S(t) = \frac{A_S Q_0}{\omega_0} \dot{\phi}(t) \cos [\omega_0(t-\tau) + \phi(t-\tau) + \frac{\pi}{2}]$$

Le comparateur de phase délivre un signal basse fréquence :

$$(176) \quad V_{BF}(t) = K V_R(t) V_S(t) = K \frac{Q_0 A_S A_R}{\omega_0 2} \dot{\phi}(t) \cos [\omega_0(\tau - \theta) + \phi(t-\tau) - \phi(t-\theta) + \frac{\pi}{2}]$$

$$(177) \quad V_{BF}(t) = K_+ \frac{Q_0}{\omega_0} \dot{\phi}(t) \sin [\omega_0(\tau - \theta) + \phi(t-\tau) - \phi(t-\theta)]$$

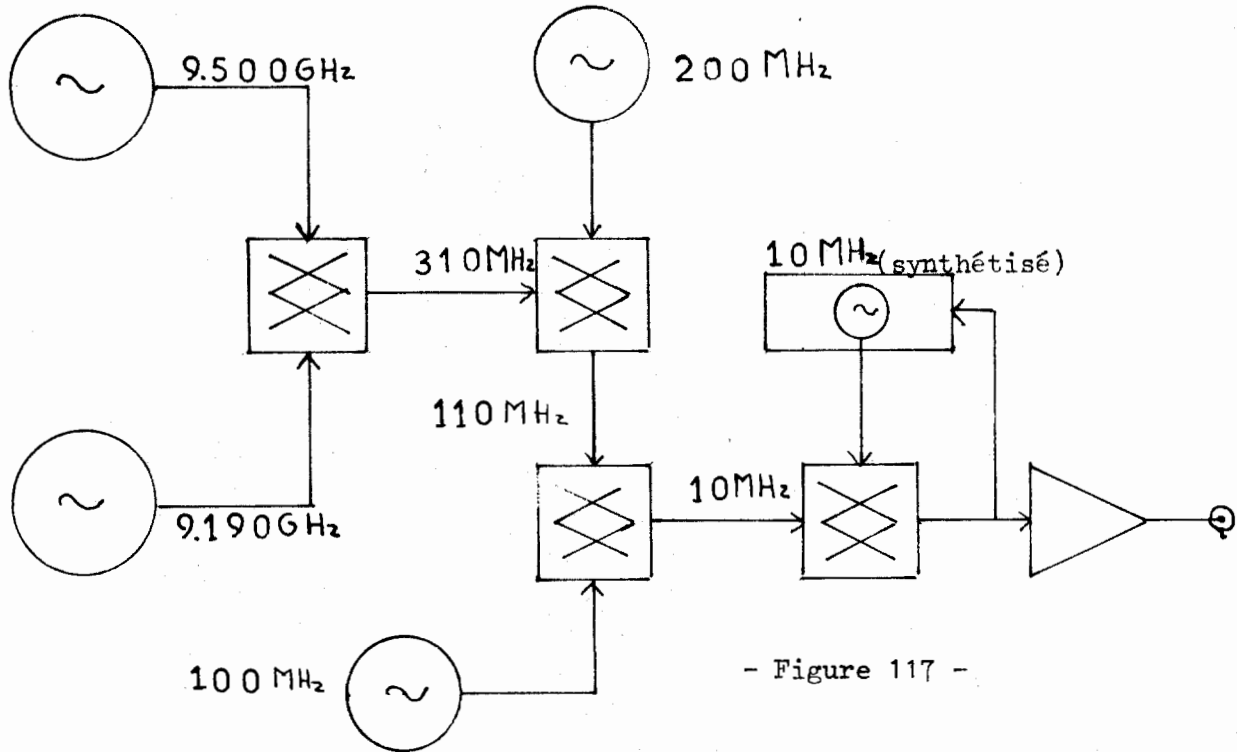
Les deux voies sont en quadrature pour $\omega_0(\tau - \theta) = \frac{\pi}{2}$.

$$(178) \quad V_{BF}(t) = K_+ \frac{Q_0}{\omega_0} \dot{\phi}(t) \sin [\frac{\pi}{2} + \phi(t-\tau) - \phi(t-\theta)]$$

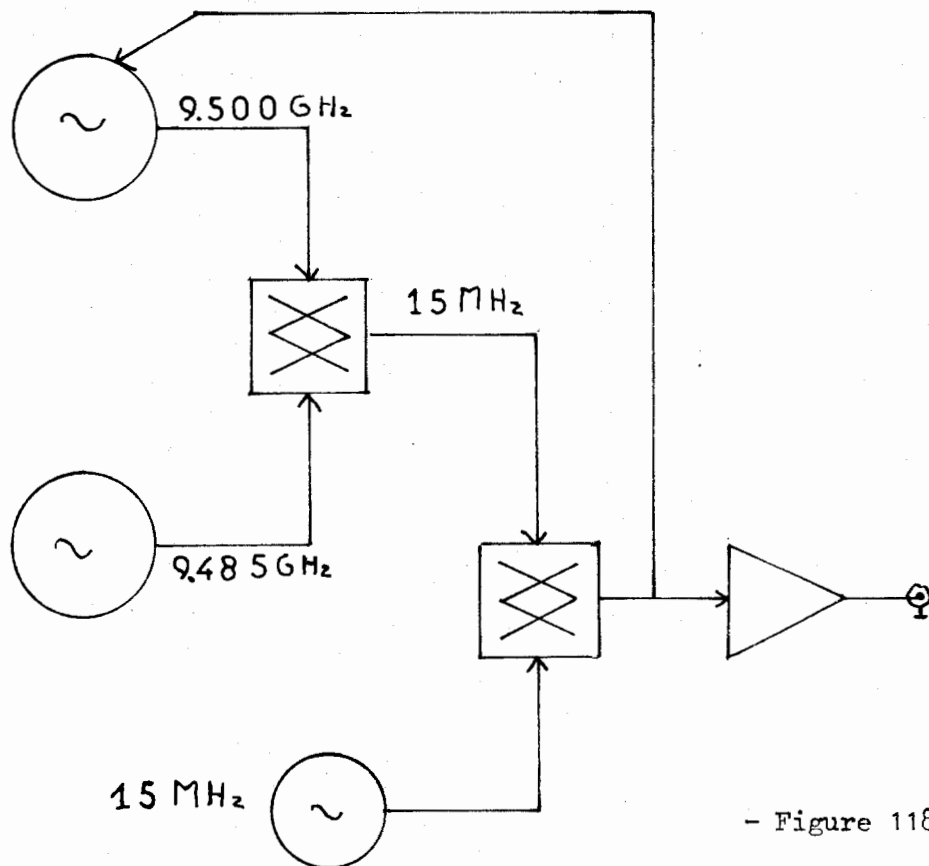
$$(179) \quad V_{BF}(t) = K_+ \frac{Q_0}{\omega_0} \dot{\phi}(t)$$

L'analyse spectrale de la tension $V_{BF}(t)$ permet d'obtenir la densité spectrale $S_{\dot{\phi}}(f)$. La cavité résonnante constitue le seul élément de précision de ce banc de mesure ; la valeur de son coefficient de qualité est un compromis entre la bande d'analyse ($\Gamma(f(t)) = i \frac{Q_0}{\omega_0} \dot{\phi}(t)$ pour $B \leq \frac{F_c}{2Q_0}$, B sera important si Q_0 est faible) et la sensibilité du banc de mesure ($V_{BF}(t) = K_+ \frac{Q_0}{\omega_0} \dot{\phi}(t)$, la détection sera d'autant meilleure que Q_0 sera élevé).

Si l'on dispose de deux sources hyperfréquences, on peut utiliser la méthode de battement dont nous donnons deux exemples présentés dans la référence (21):



- Figure 117 -



- Figure 118 -

CONCLUSION

Une évolution se produit, depuis quelques années, dans le domaine de la caractérisation de la mesure de l'instabilité de fréquence à court terme des oscillateurs ultra-stables : il y a environ dix ans, les paramètres relatifs aux domaines fréquence et temps étaient nettement distincts et l'instrumentation était spécifique à chacun d'eux (analyse spectrale pour le domaine fréquence et fréquencemètre pour le domaine temps).

Les relations entre les paramètres relatifs aux deux domaines étaient peu connues souvent mal interprétées et généralement peu utilisées en pratique.

Depuis quelques années, des analyses mathématiques plus approfondies [16] [20] sur ces relations ont permis, d'une part de mieux comprendre leur signification physique, d'autre part, de montrer que l'instrumentation classiquement réservée à l'un des domaines était utilisable avec profit pour l'autre domaine. C'est en tenant compte de cette évolution récente que ce mémoire a été consacré à l'étude de la variance de Hadamard et de la variance passe-haut.

La variance de Hadamard qui permet de mesurer l'instabilité dans le domaine fréquence à partir d'un processus de mesures temporelles, apparaît comme le complément indispensable de l'analyse spectrale pour les fréquences de Fourier inférieures à quelques hertz (en prenant toutefois certaines précautions).

Inversement, la variance mesurée par filtrage passe-haut du bruit de phase, s'est révélée être plus intéressante que la variance d'Allan directement mesurée par comptage, pour des durées de mesure inférieures à quelques secondes.

Cette étude conduit ainsi à reconsidérer le choix de l'instrumentation à utiliser pour une mesure donnée compte tenu, non seulement du domaine choisi, (temps ou fréquence), mais aussi de la gamme des valeurs de τ ou de f que l'on souhaite couvrir.

La variance de Hadamard devient quasiment indispensable pour l'analyse des très basses fréquences de Fourier, alors que la méthode classique est tout à fait adaptée aux fréquences plus élevées.

La mesure de la variance par filtrage passe-haut, aisément réalisable pour des valeurs de τ inférieures à quelques secondes, possède des avantages certains sur la technique classique du comptage qui s'impose pour les plus grandes durées.

Le tableau suivant permet de résumer cette situation :

Mesures Domaines	Méthode de la démodulation et filtrage du bruit de phase	Méthode du comptage numérique de fréquence
Domaine Fréquence	<u>Filtrage passe-bande étroit</u> $f > \text{quelques hertz}$	<u>Variance de Hadamard</u> ⁽¹⁾ Millihertz < f < quelques hertz
Domaine temps	<u>Filtrage passe-haut</u> ⁽³⁾ $\tau < \text{quelques secondes}$	<u>Variance d'Allan</u> ⁽²⁾ $\tau > \text{quelques secondes}$

(1) En prenant toutefois garde aux erreurs que peut introduire cette méthode.

(2) Cette méthode est bien sûr utilisable pour des valeurs de τ inférieures à la seconde.

(3) Pas de traitement statistique des données. Durée totale de mesure plus courte que par comptage pour une précision statistique donnée.

En Conclusion, les possibilités des bancs de mesure actuels permettent aisément la caractérisation des meilleurs oscillateurs disponibles, ce qui permettra de suivre les progrès qui ne manqueront pas de se produire dans leurs performances au cours des années à venir.

On peut d'ores et déjà prévoir que le temps viendra où il sera nécessaire, compte tenu de ces progrès, de reconsidérer les bancs de mesure, voire même d'inventer de nouvelles méthodes d'analyse théoriques et expérimentales.

ANNEXES

ANNEXE A

Calcul de la fonction de transfert de la variance de Hadamard

Soit $h_H(t)$ la réponse impulsionnelle du filtre de Hadamard :

$$\begin{aligned}
 (180) \quad H_H(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h_H(t) e^{-j2\pi f t} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-j2\pi f t}}{\tau} \sum_{n=0}^{N-1} [\mathcal{U}(t - 2n(\tau + T_m)) - \mathcal{U}(t - (2n+1)(\tau + T_m)) + \mathcal{U}(t - (2n+1)(\tau + T_m)) + \\
 &\quad \mathcal{U}(t - (2n+1)(\tau + T_m) - \tau)] dt \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{e^{-j2\pi f 2n(\tau + T_m)}}{j2\pi \tau f} - \frac{e^{-j2\pi f [2n(\tau + T_m) + \tau]}}{j2\pi \tau f} - \frac{e^{-j2\pi f [(2n+1)(\tau + T_m)]}}{j2\pi \tau f} + \frac{e^{-j2\pi f [(2n+1)(\tau + T_m) + \tau]}}{j2\pi \tau f} \right] \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[e^{j2\pi f 2n(\tau + T_m)} \left(\frac{1 - e^{-j2\pi \tau f}}{j2\pi \tau f} \right) - e^{-j2\pi f (2n+1)(\tau + T_m)} \left(\frac{1 - e^{-j2\pi \tau f}}{j2\pi \tau f} \right) \right] \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{\sin(\pi \tau f)}{\pi \tau f} e^{-j\pi \tau f} \left[e^{-j2\pi f 2n(\tau + T_m)} - e^{-j2\pi f (2n+1)(\tau + T_m)} \right] \right] \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{\sin(\pi \tau f)}{\pi \tau f} e^{-j\pi \tau f} \left[e^{-j2\pi f 2n(\tau + T_m)} (1 - e^{-j2\pi f (\tau + T_m)}) \right] \right] \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{\sin(\pi \tau f)}{\pi \tau f} e^{-j\pi \tau f} \left[e^{-j2\pi f 2n(\tau + T_m)} 2j \sin[\pi f (\tau + T_m)] e^{j\pi f (\tau + T_m)} \right] \right] \\
 &= \left[\frac{\sin(\pi \tau f)}{\pi \tau f} \right] \left[2j \sin[\pi f (\tau + T_m)] e^{-j\pi f (2\tau + T_m)} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi f 2n(\tau + T_m)} \right] \\
 &= \left[\frac{\sin(\pi \tau f)}{\pi \tau f} \right] 2j \sin[\pi f (\tau + T_m)] e^{-j\pi f (2\tau + T_m)} \times \left[\frac{1 - e^{-j2\pi f 2N(\tau + T_m)}}{1 - e^{-j2\pi f 2(\tau + T_m)}} \right] \\
 &= \left[\frac{\sin(\pi \tau f)}{\pi \tau f} \right] 2j \sin[\pi f (\tau + T_m)] e^{-j\pi f (2\tau + T_m)} \times e^{-j2\pi f (N-1)(\tau + T_m)} \left[\frac{\sin 2\pi f N(\tau + T_m)}{\sin 2\pi f (\tau + T_m)} \right] \\
 (181) \quad &= j \left[\frac{\sin(\pi \tau f)}{\pi \tau f} \right] \cdot \left[\frac{\sin[2\pi f N(\tau + T_m)]}{\cos[\pi f (\tau + T_m)]} \right] e^{-j2\pi f N \left[N(\tau + T_m) - \frac{T_m}{2} \right]}
 \end{aligned}$$

$$(182) \quad \text{soit enfin: } |H_H(f)| = \left| \frac{\sin(\pi \tau f)}{\pi \tau f} \cdot \frac{\sin[2\pi f N(\tau + T_m)]}{\cos[\pi f (\tau + T_m)]} \right|$$

ANNEXE B

Calcul de Δf_1 (largeur des filtres de Hadamard)

Pour $T_M = 0$

$$|H_H(f_n)|^2 = \frac{16 N^6}{n^2 \pi^2} \quad \text{et} \quad f_1 \tau = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{\substack{n \\ \text{impair}}} \frac{16 N^2}{n^2 \pi^2} \Delta f_0 = \frac{16 N^2}{\pi^2} \Delta f_0 \sum_{\substack{n \\ \text{impair}}} \frac{1}{n^2} = 2 N^2 \Delta f_0$$

(183) La condition : $2 N^2 \Delta f_0 = \frac{N}{\tau}$, entraine $\Delta f_0 = \frac{f_1}{N}$

Pour $T_M = \frac{\tau}{2}$

$$|H_H(f_n)|^2 = \frac{27 N^2}{n^2 \pi^2} \quad (n \neq 3m \quad n \text{ et } m \text{ impair})$$

$$\sum_{\substack{n \\ \text{impair} \\ \neq 3m}} \frac{27 N^2}{n^2 \pi^2} \Delta f_0 = \frac{27 N^2}{\pi^2} \Delta f_0 \sum_{\substack{n \\ \text{impair} \\ \neq 3m}} \frac{1}{n^2} = 3 N^2 \Delta f_0$$

(184) La condition : $3 N^2 \Delta f_0 = \frac{N}{\tau}$, entraine $\Delta f_0 = \frac{f_1}{N}$

Pour $T_M = \tau$

$$|H_H(f_n)|^2 = \frac{32 N^2}{n^2 \pi^2} \quad \text{et} \quad f_1 \tau = \frac{1}{4}$$

$$\sum_{\substack{n \\ \text{impair}}} \frac{32 N^2}{n^2 \pi^2} \Delta f_0 = \frac{32 N^2}{\pi^2} \Delta f_0 \sum_{\substack{n \\ \text{impair}}} \frac{1}{n^2} = 4 N^2 \Delta f_0$$

(185) La condition : $4 N^2 \Delta f_0 = \frac{N}{\tau}$, entraine : $\Delta f_0 = \frac{f_1}{N}$

ANNEXE C

Calcul des valeurs a, b, (variance de Hadamard)

(186)

$$T.F [R_o'(t)] = [2a \cos(5\pi T f) + 2b \cos(3\pi T f) + 2 \cos(\pi T f)] \left(\frac{\sin \pi T f}{\pi T f} \right)$$

avec $T = \frac{\tau}{6}$ et $f_1 = \frac{1}{2\tau} = \frac{1}{12T}$

La fonction $[2a \cos(5\pi T f) + 2b \cos(3\pi T f) + 2 \cos(\pi T f)]$ doit s'annuler pour les fréquences : $f_3 = \frac{3}{2\tau}$, $f_5 = \frac{5}{2\tau}$, $f_7 = \frac{7}{2\tau}$, $f_9 = \frac{9}{2\tau}$,

$$f_3 = \frac{3}{2\tau}$$

$$\begin{aligned} 2a \cos\left(\frac{15\pi}{12}\right) + 2b \cos\left(\frac{9\pi}{12}\right) + 2 \cos\left(\frac{3\pi}{12}\right) &= 0 \\ -2a \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - 2b \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) &= 0 \end{aligned}$$

soit $a + b = 1$

$$f_5 = \frac{5}{2\tau}$$

$$\begin{aligned} 2a \cos\left(\frac{25\pi}{12}\right) + 2b \cos\left(\frac{15\pi}{12}\right) + 2 \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) &= 0 \\ 2a \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) - 2b \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2 \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) &= 0 \end{aligned}$$

$$f_7 = \frac{7}{2\tau}$$

$$\begin{aligned} 2a \cos\left(\frac{35\pi}{12}\right) + 2b \cos\left(\frac{21\pi}{12}\right) + 2 \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) &= 0 \\ -2a \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + 2b \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - 2 \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) &= 0 \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi deux conditions :

(187)
$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 2a \cos \frac{\pi}{12} - 2b \cos \frac{\pi}{4} - 2 \cos \frac{5\pi}{12} = 0 \end{cases}$$

(188)
$$\begin{cases} a = \frac{\cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{5\pi}{12}}{\cos \frac{\pi}{12} - \cos \frac{\pi}{4}} = \frac{\cos \frac{\pi}{4} - [\cos \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{4}]}{\cos \frac{\pi}{4} - [\cos \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{4}]} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} \\ b = 1 - a = \frac{2}{\sqrt{3} + 1} = \sqrt{3} - 1 \end{cases}$$

ANNEXE D

Développement de la relation : $E[\sigma_H^2(N, \tau, \tau)]$

$$\begin{aligned}
 (189) \quad E[\sigma_H^2(N, \tau, \tau)] &= \frac{2}{\tau^2} \sum_{\beta=1}^{2N-1} C_{\beta} (R_{\phi}(0) - R_{\phi}(\beta\tau)) - (R_{\phi}(0) - R_{\phi}(2N\tau)) \\
 E[\sigma_H^2(N, \tau, \tau)] &= \frac{2}{\tau^2} \left[\left(\sum_{\beta}^{2N-1} C_{\beta} - 1 \right) R_{\phi}(0) - \sum_{\beta}^{2N-1} C_{\beta} R_{\phi}(\beta\tau) + R_{\phi}(2N\tau) \right] \\
 E[\sigma_H^2(N, \tau, \tau)] &= \frac{1}{\tau^2} \left[\left(2 \sum_{\beta}^{2N-1} (8N - 4\beta) (-1)^{\beta+1} - 2 \right) R_{\phi}(0) + \right. \\
 &\quad \left. \sum_{\beta}^{2N-1} (-1)^{\beta} (16N - 8\beta) R_{\phi}(\beta\tau) + 2 R_{\phi}(2N\tau) \right] \\
 2 \left[\sum_{\beta}^{2N-1} (8N - 4\beta) (-1)^{\beta+1} - 1 \right] &= \left\{ 2 \sum_{\beta}^{2N-1} 8N (-1)^{\beta+1} - 2 \sum_{\beta}^{2N-1} 4\beta (-1)^{\beta+1} - 2 \right\} \\
 &= 16N - 2 - 2 \sum_{\beta=1}^{2N-1} 4\beta (-1)^{\beta+1} = 16N - 2 - 8 \sum_{\beta}^{2N-1} \beta (-1)^{\beta+1} \\
 &= 16N - 2 - 8 \left[\sum_{\beta \text{ impair}}^{2N-3} \left(\beta (-1)^{\beta+1} + (\beta+1) (-1)^{\beta+2} \right) + 2N-1 \right] \\
 &= 16N - 2 - 8 \left[\sum_{\beta \text{ impair}}^{2N-3} (-1) + 2N-1 \right] = 16N - 2 - 8N = 8N - 2 \\
 (190) \quad E[\sigma_H^2(N, \tau, \tau)] &= \frac{1}{\tau^2} \left[(8N - 2) R_{\phi}(0) + \sum_{\beta}^{2N-1} (-1)^{\beta} (16N - 8\beta) R_{\phi}(\beta\tau) + 2 R_{\phi}(2N\tau) \right]
 \end{aligned}$$

ANNEXE E

Bruit dans les résistances

L'agitation thermique des porteurs introduit une source de bruit dans toute résistance ou partie réelle d'une impédance complexe. La densité spectrale de ce bruit est constante :

$$S_R(f) = 4 k T R$$

{ k : constante de Boltzmann.
T : température absolue.
R : résistance en ohms.

$S_R(f)$ représente le bruit ultime d'une résistance, la nature de celle-ci n'intervenant pas (carbone, couche métallique : voir la courbe expérimentale figure 419).

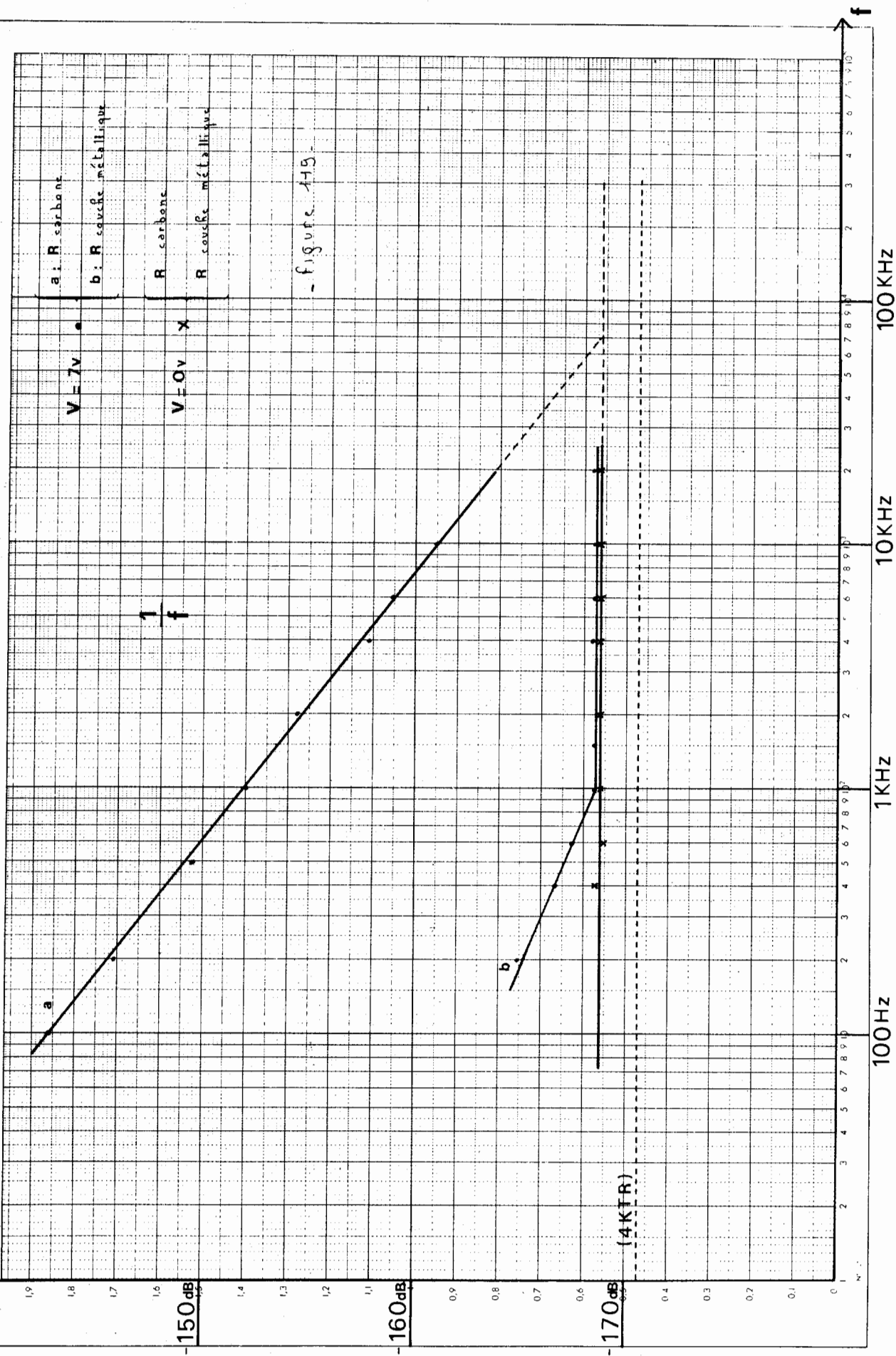
Tout courant continu I, traversant cette résistance, crée un bruit en excès dont le niveau dépend de la nature de la résistance. Comme le montre la figure 419, ce bruit est plus important pour une résistance au carbone. Expérimentalement (Réf. (24)), on établit la loi suivante :

(191)

$$S_{R_{ex}}(f) = \frac{k I^2 R^2}{f}$$

L'influence d'une tension alternative sur le bruit en excès est moins importante et encore très mal connue Réf. (27).

$$\uparrow 10 \lg(S_{n,v}(f)) = 10 \lg(4KTR + KV^2) \quad R = 550 \Omega \quad V = \text{tension aux bornes de la résistance}$$

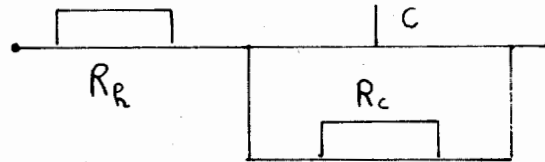


ANNEXE F

Bruit d'un condensateur

Nous nous intéressons à ce problème car l'amplificateur faible bruit comporte une capacité d'entrée.

Un condensateur idéal n'introduit pas de bruit car son impédance est une réactance pure : $Y = j\omega C$. En réalité, la conductivité et l'hystérésis du diélectrique conduisent au schéma équivalent suivant :



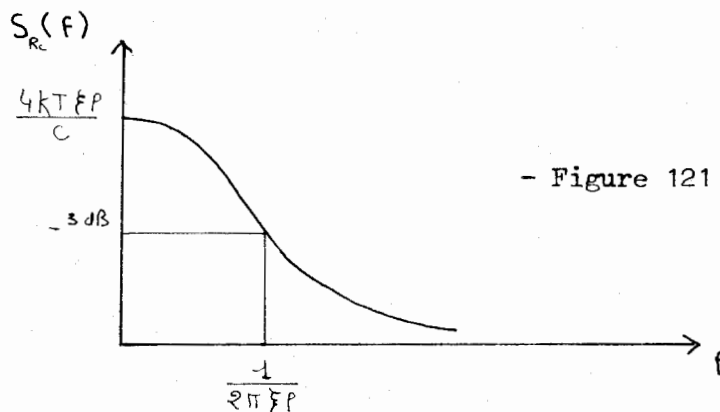
- Figure 120 -

R_h est très faible dans le domaine de fréquence utilisé.
 $R_c = \frac{\epsilon \rho}{c}$ ϵ : perméabilité du diélectrique.
 ρ : résistivité du diélectrique.

R_c peut être très grand mais sa tension de bruit sera filtrée par la capacité C :

$$(192) \quad S_{R_c}(f) = 4KT R_c \left[\frac{1}{1 + (2\pi R_c C f)^2} \right] = \frac{4KT \epsilon P}{C} \left[\frac{1}{1 + (2\pi \epsilon P)^2 f^2} \right]$$

Pour un diélectrique donné (ϵ_0, ρ_0), $S_{R_c}(f)$ est inversement proportionnel à C , la bande passante restant constante.



- Figure 121 -

$$(193) \quad \int_0^{+\infty} S_{R_c}(f) df = \frac{KT}{C}$$

ANNEXE G

Rappel des différentes sources de bruit des transistors

a) Bruit ultime

a-1 - Le bruit de grenaille ("shot noise")

Le courant traversant un semiconducteur est composé d'un très grand nombre de porteurs émis aléatoirement par la cathode. Si l'on néglige les effets secondaires dans le volume (collisions, générations, etc...), l'arrivée aléatoire de ces porteurs sur l'anode crée un bruit de grenaille. C'est un bruit blanc :

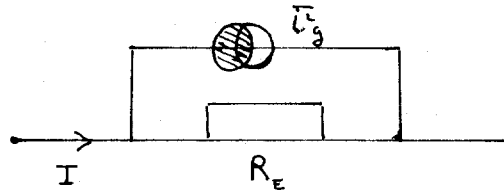
$$(194) \quad S_g(f) = 2 q I$$

{ q : charge des porteurs.
I : courant continu traversant le semiconducteur.

Cette source de bruit doit être introduite au niveau de chaque barrière de potentiel (une résistance pure n'introduit pas de bruit de grenaille). Pour une jonction p.n, la densité spectrale $S_g(f)$ dépend de l'impédance dynamique de la jonction définie par $R_e = \frac{KT}{qI}$:

$$(195) \quad S_g(f) = 2 q I = \frac{2 k T}{R_e}$$

On schématise ce bruit par une source de courant :



- Figure 122 -

R_e est une résistance dynamique qui n'introduit pas de bruit thermique. Pour une jonction p.n, le bruit thermique est introduit par la conductivité des semiconducteurs, hors de la région de charge d'espace. Nous retrouverons cette source de bruit dans la base des transistors.

a-2 - Diffusion et bruit thermique

Le bruit de diffusion est un processus plus général que le bruit thermique quand la relation d'Einstein ($D = \frac{KT\mu}{q}$) est vérifiée, ils s'expriment sous la même forme. Dans une jonction p.n, le courant inverse de diffusion I_0 s'exprime sous forme de bruit thermique alors que le courant direct I introduit son bruit de grenaille :

$$(196) \quad S_{p.n}(f) = 2q(I + 2I_0)$$

Remarque

Un semiconducteur de concentration N et de mobilité μ a pour conductivité $\sigma = e N \mu$

Si la géométrie du semiconducteur est connue, on peut alors calculer sa résistance :

pour un barreau de section S et d'épaisseur h :

$$R = \frac{h}{S\sigma} = \frac{h}{S e N \mu}$$

Cette résistance introduit son bruit thermique :

$$(197) \quad S_R(f) = 4kTR = 4kT \left[\frac{h}{S e N \mu} \right]$$

Nous retrouverons cette source de bruit dans la base des transistors.

b) Bruit en excès

Les différentes sources de bruit présentées précédemment sont des modèles généraux caractérisant le bruit ultime des semiconducteurs. Ils ne dépendent pas de la qualité technologique du composant. Il existe d'autres types de bruit "en excès" qui dépendent de la pureté des semiconducteurs, de l'état des surfaces des jonctions, des défauts cristallins, etc... Ces bruits, prédominant en basses fréquences, différencient la qualité des composants.

b-1 - Bruit de scintillation ("flicker")

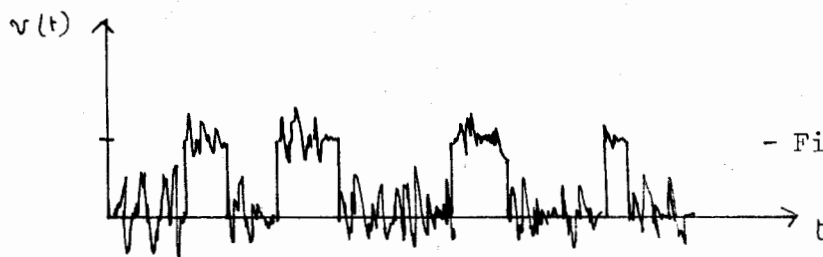
Ce bruit prédomine aux basses fréquences dans tous les dispositifs à semiconducteurs. Sa densité spectrale est de la forme : $Kf^{-\alpha}$ avec $\alpha \approx 1$. La constante K ne peut être déterminée qu'expérimentalement. Les propriétés des surfaces étant importantes pour une jonction p.n, ce bruit ne pourra être connu que lorsque la contribution des courants superficiels au courant total sera explicitée.

Le bruit "flicker" augmente différemment avec le vieillissement des composants. La dégradation est moins importante pour les composants à faible bruit.

Le stockage à chaud peut faire diminuer ou augmenter le niveau de bruit flicker. Aucune justification n'a été donnée. Réf (27)

b-2 - Bruit en créneaux ("pop corn")

En observant sur un oscilloscope une tension de bruit, on peut remarquer des sauts d'amplitude constante apparaissant à des instants aléatoires.



- Figure 123 -

L'influence de cette perturbation est surtout importante aux très basses fréquences ($f < 100$ Hz). Comme pour le bruit flicker, l'état des surfaces influe sur le niveau de ce bruit. Les modèles mathématiques utilisés pour décrire ce phénomène ont conduit à des densités spectrales de la forme :

(198)

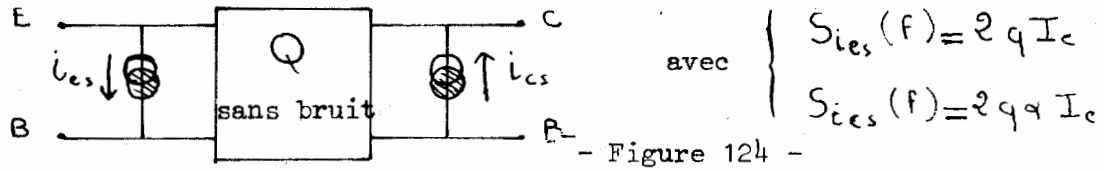
$$S_{p.c}(f) = \frac{C}{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^2}$$

Un bruit en $Kf^{-\alpha}$ $1 \leq \alpha \leq 2$ peut s'expliquer par la combinaison d'un bruit flicker et d'un bruit en créneaux.

ANNEXE H

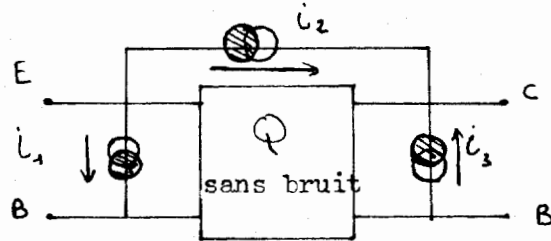
Sources de bruit d'un transistor en émetteur-commun

Dans le chapitre III, nous avons obtenu le schéma "base commune" suivant :



- Figure 124 -

Dans un quadripole, on peut remplacer deux sources de courants corrélées par trois sources indépendantes :



- Figure 125 -

En considérant la somme des courants aux noeuds E et C, on obtient :

$$(199) \quad \begin{cases} i_{es} = i_1 + i_2 \\ i_{cs} = i_2 + i_3 \end{cases} \quad \begin{cases} \overline{i_{es}^2} = \overline{i_1^2} + \overline{i_2^2} \\ \overline{i_{cs}^2} = \overline{i_2^2} + \overline{i_3^2} \\ \overline{i_{es} i_{cs}} = \overline{i_2^2} \end{cases} \quad \begin{cases} \overline{i_1^2} = \overline{i_{es}^2} - \overline{i_{es} i_{cs}} \\ \overline{i_3^2} = \overline{i_{cs}^2} - \overline{i_{es} i_{cs}} \\ \overline{i_2^2} = \overline{i_{es} i_{cs}} \end{cases}$$

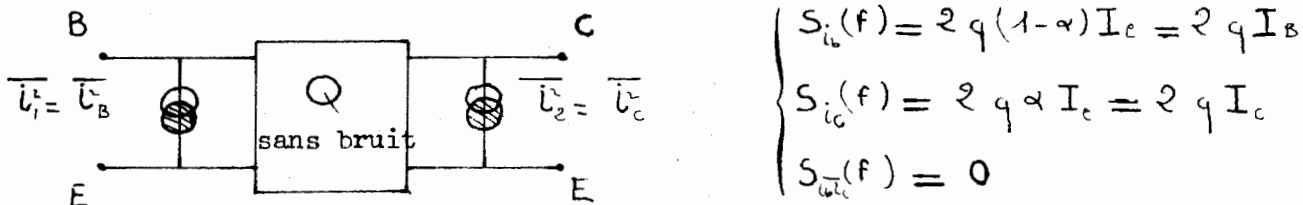
Sachant que :

$$(200) \quad \begin{cases} S_{i_{es}}(f) = 2qI_c \\ S_{i_{cs}}(f) = 2q\alpha I_c \\ S_{\overline{i_{es} i_{cs}}}(f) = 2q\alpha I_c \end{cases}$$

Les relations (199) nous permettent de déterminer la densité spectrale des trois sources de courants : $\overline{i_1^2}$, $\overline{i_2^2}$, $\overline{i_3^2}$:

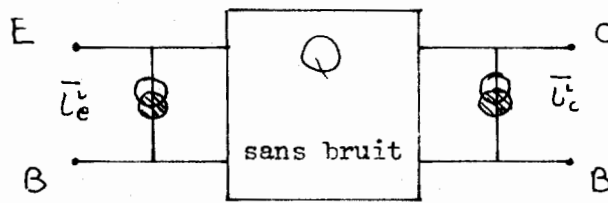
$$(201) \quad \begin{cases} S_{i_1}(f) = 2qI_c - 2q\alpha I_c = 2q(1-\alpha)I_c \\ S_{i_2}(f) = 2q\alpha I_c \\ S_{i_3}(f) = 2q\alpha I_c - 2q\alpha I_c = 0 \end{cases}$$

L'émetteur étant commun à l'entrée et à la sortie du quadripole :



- Figure 126 -

Le montage base commune fait apparaître le bruit de répartition :



- Figure 127 -

(202)

$$\begin{cases} \bar{i}_e = \bar{i}_{es} \\ \bar{i}_c = (\bar{i}_{cs} - \alpha \bar{i}_{es}) (\bar{i}_{cs} - \alpha \bar{i}_{es}) = \bar{i}_{cs} + \alpha^2 \bar{i}_{es} - 2\alpha \bar{i}_{cs} \bar{i}_{es} \end{cases}$$

(203)

d'où :

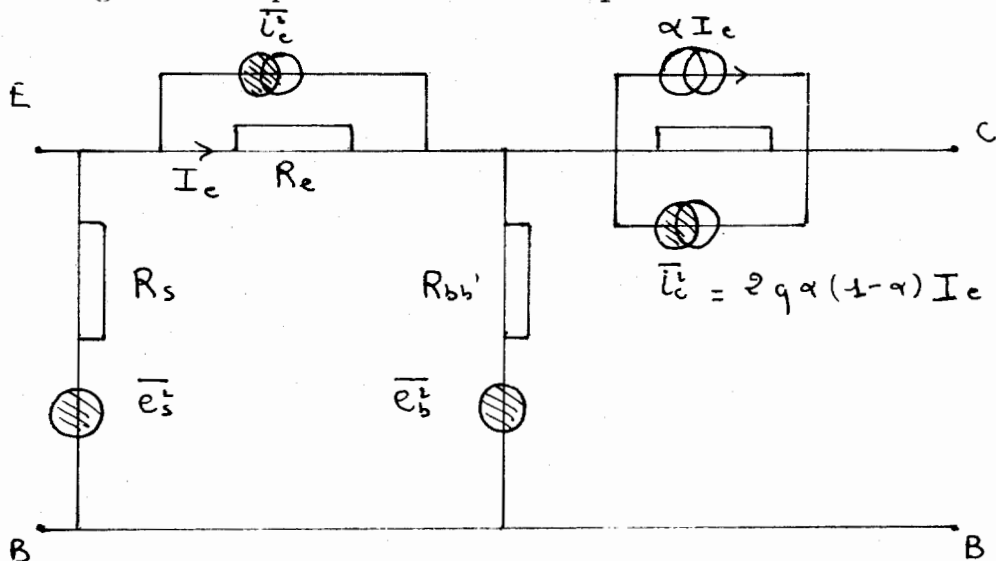
$$\begin{cases} S_{i_e}(f) = 2q\alpha I_e \\ S_{i_c}(f) = 2q\alpha(1-\alpha)I_e \\ S_{\bar{i}_c}(f) = 0 \end{cases}$$

La source de courant $\bar{i}_c^2$ représente le bruit de répartition du courant émetteur I_e . Celui-ci se répartit en : $(1-\alpha)$ dans la base et α dans le collecteur, donnant naissance à la source de courant de bruit :

(204)

$$2q\alpha(1-\alpha)I_e$$

La figure (128) représente le schéma équivalent ainsi obtenu :



- Figure 128 -

$$(208) \quad \left[\frac{2}{G_1} + \frac{I_{B2}}{I_{C1}} + \frac{1}{G_1 G_2} \right] \leq 1$$

Pour être compatible avec le gain de l'amplificateur, on doit avoir :

$$G_1 \gg 1 \quad \text{et} \quad G_1 G_2 \gg 1$$

$$(209) \quad \text{d'où la condition} \quad I_{C1} \geq I_{B2}$$

b) Polarisation à fort courant

$$2 K T R_e \ll 4 K T (R_s + R_{bb'})$$

Le bruit du deuxième transistor devant être négligeable :

$$4 K T (R_s + R_{bb'}) \geq \left[\frac{4 K T}{R_{C1}} + 2 q I_{B2} + \frac{2 K T R_{e2}}{R_{C1}^2} \right] R_{C1}$$

$$(R_s + R_{bb'}) \geq \left[\frac{R_{C1}^2}{R_{C1}} + \frac{I_{B2} R_{C1}}{2 I_{C1}} + \frac{R_{C1}^2 R_{e2}}{R_{C1}^2} \right]$$

$$(R_s + R_{bb'}) \geq \left[\frac{R_{C1}}{G_1} + \frac{I_{B2} R_{C1}}{2 I_{C1}} + \frac{R_{C1}}{G_1 G_2} \right]$$

$$(210) \quad (R_s + R_{bb'}) \geq \left[\frac{1}{G_1} + \frac{I_{B2}}{2 I_{C1}} \right] R_{C1}$$

Les conditions (209, 210) sont toujours facilement réalisables de telle sorte que le bruit de l'amplificateur dépend principalement du premier étage.

ANNEXE J

Boucle d'asservissement en phase du 1er et 2ème ordre. Calcul des fonctions de transfert $|H_o(f)|$ et $|H_R(f)|$.

1) Asservissement du 1er ordre

$$H(f) = G_o \quad \text{avec } K = \frac{K_\phi * K_o}{N}$$

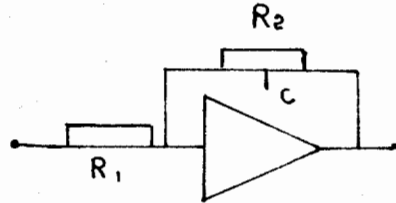
$$(211) \quad |H_{R1}(\omega)|^2 = \left| \frac{N K G_o}{P + K G_o} \right|^2 = \frac{N^2 G_o^2}{\omega^2 + G^2} = \frac{N^2 \omega_{n1}^2}{\omega^2 + \omega_{n1}^2} \quad \text{avec } \begin{cases} G = \frac{G_o K + K_o}{N} \\ \omega_{n1} = G \end{cases}$$

$$(212) \quad |H_{o1}(\omega)|^2 = \left| \frac{P}{P + K G_o} \right|^2 = \frac{\omega^2}{\omega^2 + \omega_{n1}^2}$$

$|H_{R1}(\omega)|^2$ et $|H_{o1}(\omega)|^2$ sont représentées figure (130).

2) Asservissement du 2ème ordre

$$(213) \quad H(p) = \frac{G_o}{1 + \tau p}$$



$$\begin{cases} G_o = \frac{R_2}{R_1} \\ \tau = R_2 C \end{cases}$$

$$S_{\phi_s}(\omega) = \left| \frac{P(1 + \tau p)}{P(1 + \tau p) + K G_o} \right|^2 S_{\phi_o}(\omega) + \left| \frac{N K G}{P(1 + \tau p) + K G_o} \right|^2 S_{\phi_R}(\omega)$$

$$S_{\phi_s}(\omega) = |H_{o2}(\omega)|^2 S_{\phi_o}(\omega) + |H_{R2}(\omega)|^2 S_{\phi_R}(\omega)$$

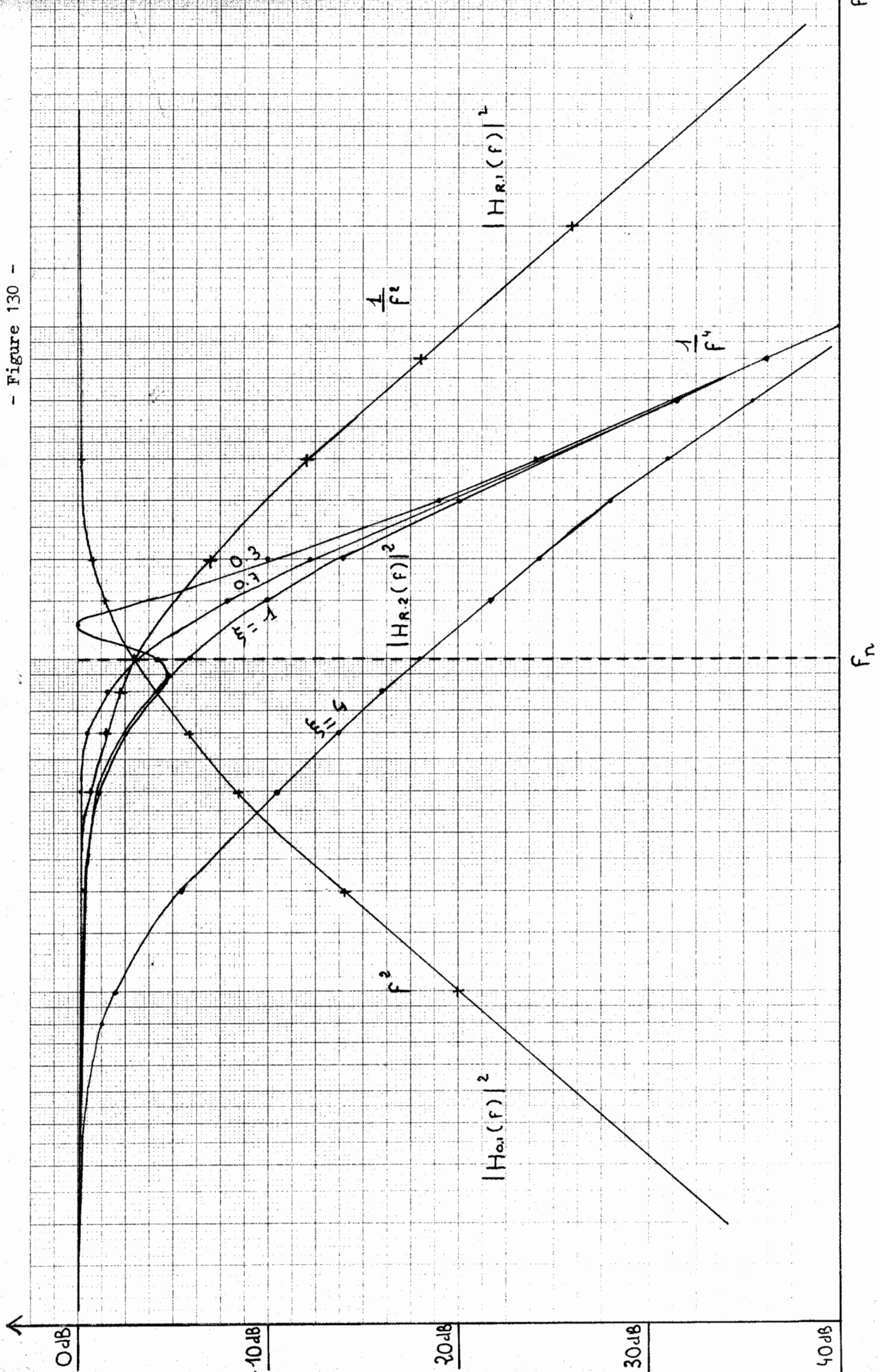
$$|H_{o2}(\omega)|^2 = \left| \frac{P(1 + \tau p)}{P(1 + \tau p) + G} \right|^2 = \frac{\omega^2 (1 + \omega^2 \tau^2)}{\omega^2 (1 + \omega^2 \tau^2) + G^2 - 2 G \tau \omega^2}$$

$$(214) \quad |H_{o2}(\omega)|^2 = \frac{\tau^2 \omega^4 + \omega^2}{\tau^2 \omega^4 + (1 - 2 G \tau) \omega^2 + G^2}$$

Afin d'utiliser les notations des systèmes asservis (Réf (29)) on pose :

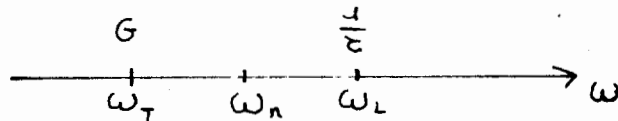
$$(215) \quad \begin{cases} \omega_n = \sqrt{\frac{G}{\tau}} & \text{fréquence naturelle de la boucle.} \\ \xi = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{G \tau}} & \text{facteur d'amortissement.} \end{cases}$$

- Figure 130 -



Nous rappelons que $\begin{cases} \omega_{\text{tracking}} = G & (\text{gain en continu}). \\ \omega_{\text{locking}} = \frac{1}{\tau} \end{cases}$

$$(216) \quad \text{donc } \omega_n = \sqrt{\omega_T \omega_L} \quad \text{et} \quad \xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega_L}{\omega_T}}$$



$$(217) \quad |H_{o2}(\omega)|^2 = \frac{\omega^4 + 4\omega_n^2 \xi^2 \omega^2}{\omega^4 + (4\omega_n^2 \xi^2 - 2\omega_n^2) \omega^2 + \omega_n^4}$$

Le filtre "passe-haut" a été tracé figure(109) pour différentes valeurs du facteur d'amortissement ($\xi = 4, 3, 2, 0.9, 0.7, 0.5, 0.3, 0.1$).

$$(218) \quad \begin{cases} \text{Pour } \omega \ll \omega_n & |H_{o2}(\omega)|^2 = 4\xi^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \text{ la pente du filtre est en } \omega^2. \\ \text{Pour } \omega \gg \omega_n & |H_{o2}(\omega)|^2 = 1 \end{cases}$$

La zone de transition ($\omega \approx \omega_n$) présente un maximum d'autant plus important que ξ est petit. La valeur optimale de ξ est $\frac{1}{\sqrt{2}}$. La figure(129) représente $|H_o(f)|^2$ S $\phi(f)$ pour différentes valeurs de ξ .

$$|H_{R2}(\omega)|^2 = \left| \frac{NKG_0}{P(1+\tau P) + KG_0} \right|^2 = \frac{N^2 G^2}{\tau^2 \omega^4 + (1 - 2G\tau) \omega^2 + G^2}$$

$$(219) \quad |H_{R2}(\omega)|^2 = \frac{N^2 \omega_n^4}{\omega^4 + (4\omega_n^2 \xi^2 - 2\omega_n^2) \omega^2 + \omega_n^4}$$

$|H_R(\omega)|^2$ est représentée figure(130) pour les valeurs de ξ (4,1,0.7,0.3).

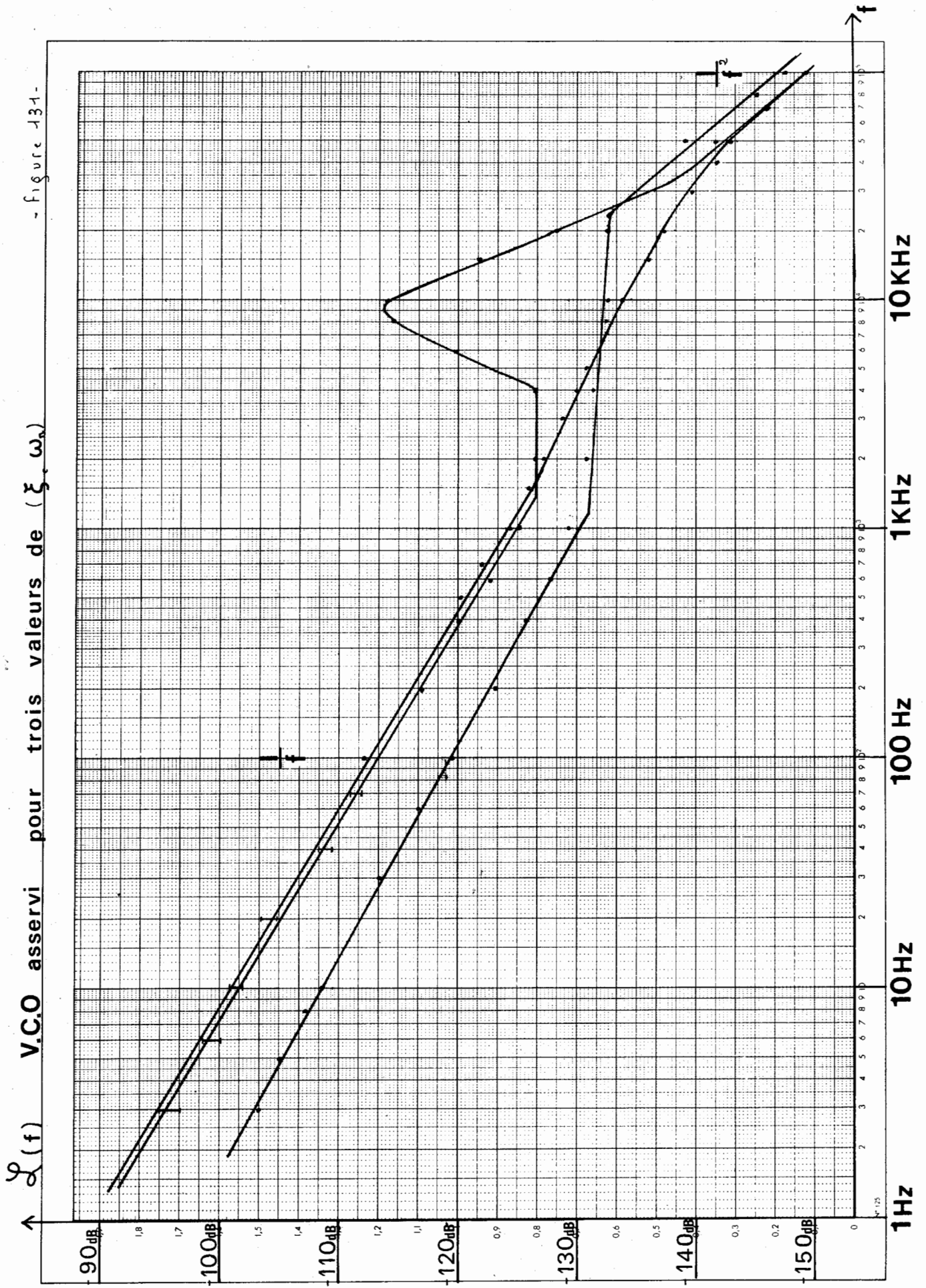
$$(220) \quad \begin{cases} \omega \ll \omega_n & |H_{R2}(\omega)|^2 = N^2 \\ \omega \gg \omega_n & |H_{R2}(\omega)|^2 = N^2 \left(\frac{\omega_n}{\omega}\right)^4 \end{cases}$$

Remarque : une source de bruit, située entre le filtre $H(f)$ et le comparateur de phase, sera filtrée avec la fonction de transfert :

$$\frac{|H_R(\omega)|^2}{K_\phi^2}$$

$\varphi(f)$ V.C.O asservi pour trois valeurs de (ξ, ω_n)

- figure 131 -



REFERENCES

- (1) PICINBONO.B : "Processus de diffusion et stationnarité".
Compte rendu de l'Académie des Sciences de PARIS
Tome 217.B, n° 14, p.661
- (2) PICINBONO.B : "Introduction à l'étude des phénomènes aléatoires"
(Dunod université 1968)
- (3) STERN.J, de BARBEYRAC.J, POGGI.R : "Méthodes pratiques d'étude des
fonctions aléatoires". (Dunod 1967)
- (4) PAPOULIS.A : "Probability, Random variables, and stochastic processes"
(Mc Graw-Hill 1965)
- (5) BLANC-LAPIERRE.A : "Modèles statistiques pour l'étude des phénomènes
de fluctuations". (Masson & Cie 1963)
- (6) CUTLER.LS and SEARLE.CL : "Some aspects of the theory and measurement of
frequency fluctuations in frequency standards"
Proc. of IEEE. Special issue on frequency stability
vol.54 n°2 (February 1966)
- (7) RUTMAN.J : "Relations between spectral purity and frequency stability"
Proc. of the 28TH Frequency Control Symposium; Atlantic-City
(May 1974)
- (8) RUTMAN.J : "Bruit dans les oscillateurs, Application à la métrologie
des fréquences et à la spectroscopie Hertzienne"
Thèse de Doctorat d'Etat, Université de PARIS VI, (Mars 1972)
- (9) RUTMAN.J : "Instabilité de fréquence des oscillateurs"
Onde électrique vol.52 (décembre 1972)
- (10) ALLAN.DW : "Statistics of atomic frequency standards"
Proc. of IEEE, Special issue on frequency stability,
vol.54 n° 2 (February 1966)
- (11) BARNES.JA and Al. : "Characterization of frequency stability"
IEEE Tr. Instr. Meas. vol IM-20, n°2, (May 1971)
- (12) BARNES.JA : "Tables of bias functions"
N.B.S Technical note n°375 (Janvier 1969)

- (13) LESAGE.P : "Caractérisation de la stabilité de fréquence d'oscillateurs dans le domaine temps et dans le domaine fréquence"
Thèse de Doctorat 3^o cycle, Université de PARIS-Sud, Centre d'Orsay, (Juin 1973)
- (14) BENDAT.J and PIERSOL.A : "Random data : analysis and measurement procedures"
(Wiley-Interscience 1971)
- (15) SPATARU.A : "Théorie de la transmission de l'information"
(Masson & Cie 1970)
- (16) BAUGH.R : "Frequency modulation analysis with the Hadamard variance"
Proc. of the 25 th Frequency Control Symposium, Atlantic City
(Avril 1971)
- (17) SAUVAGE.G et RUTMAN.J : "Analyse spectrale du bruit de fréquence des oscillateurs par la variance de Hadamard"
Annales des Télécommunications tome 28, n^o7-8 (Juil.Août 1973)
- (18) PAPOULIS.A : "The Fourier Integral and its applications"
(Mc Graw-Hill 1962)
- (19) GROSLAMBERT.J, OLIVIER.M, and UEBERSFELD.J : "Spectral and short term stability measurements" C.P.E.M 1974 LONDRES, (Juillet 1974)
- (20) RUTMAN.J : "Characterization of frequency stability : A transfer function approach and its application to measurements via filtering of phase noise" IEEE. Tr. Instr. Meas., vol.IM-23 n^o1
(March 1974)
- (21) HALFORD.D, SHOAF.JH, RISLEY.AS : "Frequency stability specifications and measurements" N.B.S Technical note n^o632 (January 1973)
- (22) RUTMAN.J et SAUVAGE.G : "Measurements of frequency stability in time and frequency domains via filtering of phase noise"
C.P.E.M, LONDRES (Juillet 1974) ;
également dans IEEE, Tr. Instr. Meas., (Décembre 1974)
- (23) MEYER.D : "A test set for the accurate measurement of phase noise in High Quality Signal Sources"
IEEE Tr. Instr. Meas., VolIM.19 n^o4 (Novembre 1970)
- (24) MOTCHENBACHER.CD and FITCHER.FC : " Low noise electronic design"
(Wiley-Interscience 1972)

- (25) VAN DER ZIEL : "Noise : sources, characterization, measurements"
(Prentice-Hall 1970)
- (26) KING.R : "Electrical noise "
(Chapman & Hall 1966)
- (27) Colloque de Toulouse (21-23 Septembre 1971) "le bruit de fond des
composants actifs semi-conducteurs", édition du CNRS
- (28) LEESON.DB : "A simple model of Feedback Oscillator Noise spectrum "
Proceedings of the IEEE, vol 54 n°2 (February 1966)
- (29) GARDNER.FM : "Phase lock techniques"(Wiley Interscience 1966)
- (30) JIMENEZ-LIDON.JJ : "Stabilité de fréquence et bruit d'oscillateurs
micro-ondes couplés directement à une cavité supra-
conductrice"
Thèse de Doctorat d'Etat, Université de PARIS-Sud,
centre d'ORSAY, (26 JUIN 1974)
- (31) BARNES.JA : "Atomic Timekeeping and the statistics of precision
signal generators"
Proceedings of the IEEE, vol.54 n°2 (February 1966)
- (32) MUELLER.O : "On 1/F noise in diodes and transistors"
Proceedings of the 28th, Frequency Control Symposium,
Atlantic City, (May 1974)