



STABILITE ET PURETE SPECTRALE

# STABILITE DE FREQUENCE et PURETE SPECTRALE des générateurs de fréquence

## LE BRUIT dans les synthétiseurs de fréquence

*Extrait de "ELECTRONIQUE-ACTUALITES" n° 317 du 16 Février 1974*



34

# STABILITE DE FREQUENCE et PURETE SPECTRALE des générateurs de fréquence

*Jacques RUTMAN*

Docteur ès Sciences  
responsable de la Recherche fondamentale  
de la Société Adret-Electronique

**L**es générateurs de fréquence de haute qualité (oscillateurs à quartz, synthétiseurs de fréquence, étalons atomiques, etc.) sont à l'heure actuelle de plus en plus utilisés.

Leurs performances ultimes sont limitées par les sources de bruit aléatoire de leurs composants électroniques (bruits thermique, de grenaille, de scintillation, etc.). Toutefois, contrairement à certains instruments auxquels on demande des performances ni très sévères, ni très difficiles à obtenir, les générateurs de fréquence doivent souvent posséder des performances très élevées : elles ne peuvent être obtenues qu'après de nombreuses études théoriques et au prix d'une grande maîtrise de la technique et de la technologie. La fréquence est actuellement le paramètre que l'on sait générer avec la plus grande stabilité, et mesurer avec la plus haute précision.

Le problème du bruit aléatoire dans les générateurs de fréquence comprend trois parties :

1 - L'étude théorique de l'effet des différentes sources de bruit sur les performances du signal émis ; elle ne peut être effectuée valablement que si une caractéristique adéquate de ces performances est utilisée.

2 - L'étude de l'influence des spécifications (de bruit) d'un générateur sur le fonctionnement de l'application qui l'utilise. Ici encore, il est nécessaire de disposer d'une caractérisation adéquate des performances du générateur.

3 - La caractérisation théorique (et les méthodes de mesure correspondantes) des performances de bruit du signal émis. Il est, en effet, souhaitable que tous les constructeurs et tous les utilisateurs utilisent les mêmes concepts et la même technologie (ce qui n'est pas toujours le cas).

La caractérisation des performances liées au bruit dans les générateurs de fréquence constitue en soi un problème fondamental aussi bien pour le constructeur que pour l'utilisateur de sources de haute qualité. Cet article est une introduction générale à ce problème difficile.

---

## LES DIFFICULTES DU PROBLEME

---

En premier lieu, la nature aléatoire du bruit nécessite l'utilisation de méthodes mathématiques statistiques qu'il est nécessaire de connaître pour une compréhension approfondie des problèmes posés et des solutions apportées : les notions de probabilité, de fonction aléatoire, de variance et de densité spectrale doivent être assimilées avant même d'aborder cette étude.

En second lieu, l'existence de plusieurs caractérisations différentes est une source de difficulté en ce sens que des concepts différents sont souvent confondus. Les paramètres caractéristiques peuvent être en effet relatifs, soit à la stabilité de fréquence (elle-même caractérisée dans le domaine fréquence et dans le domaine temps), soit à la pureté spectrale du signal.

Une bonne compréhension de ces différents concepts et des relations qui les lient est nécessaire pour éviter toute confusion.

Une autre difficulté provient de la nature de la densité spectrale de certains bruits présents dans les générateurs de fréquence. Des paramètres statistiques spéciaux comme la variance d'Allan doivent être introduits, car le paramètre statistique classique serait théoriquement infini et pratiquement très difficile à mesurer avec une bonne précision statistique.

Dernière difficulté d'ordre expérimental : le niveau très faible des perturbations à mesurer, qui nécessite des bancs de mesure spécialement adaptés. Au-delà d'un certain niveau de qualité de la source à étudier, ces mesures sont du domaine de certains laboratoires spécialisés en métrologie des fréquences.

---

## BUT DE CET ARTICLE

---

De nombreux articles mathématiques ont été publiés sur la caractérisation du bruit dans les oscillateurs, dans lesquels les concepts et leur interprétation physique sont parfois difficiles à dégager pour le non-spécialiste.

Aussi nous a-t-il semblé utile de présenter ici ces concepts sans aucune formulation mathématique.

Cette approche, accessible à un plus vaste public, possède donc une limitation inhérente : le lecteur ne doit y chercher qu'une introduction générale aux problèmes posés, et non pas les solutions mathématiques qui sont volontairement exclues de cet article.

---

## BRUIT D'AMPLITUDE ET BRUIT DE PHASE

---

Un générateur idéal sans sources de bruit délivrerait un signal sinusoïdal pur dont l'amplitude  $A_0$  et la fréquence  $f_0$  seraient constantes en fonction du temps.

En réalité, les sources de bruit interviennent, soit pour générer des fluctuations aléatoires de tension qui s'additionnent au signal utile (bruits additifs), soit pour moduler directement la phase ou la fréquence de ce signal (bruits multiplicatifs).

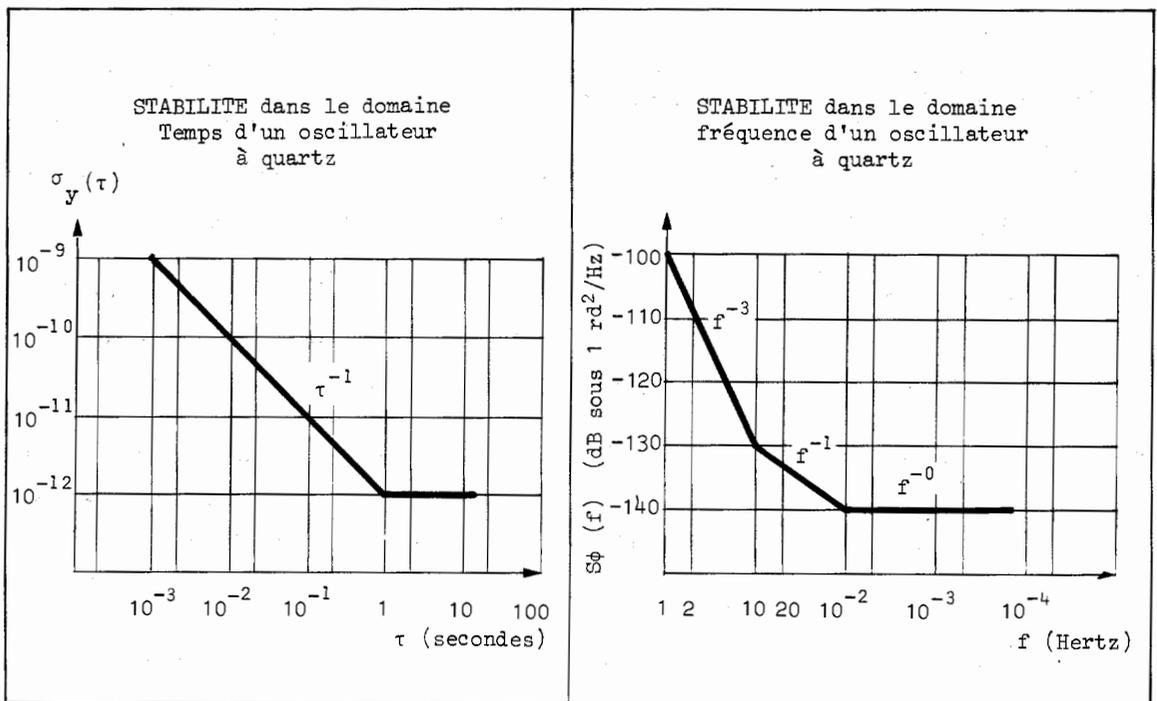
Il en résulte globalement une modulation aléatoire absolument inévitable de l'amplitude, de la phase et de la fréquence du signal, qui deviennent ainsi des fonctions aléatoires du temps ; le bruit d'amplitude est généralement négligeable vis-à-vis du bruit de phase dans les générateurs de bonne qualité.

Le problème à résoudre est alors celui de la caractérisation de la nature et du niveau du bruit de phase et du bruit de fréquence qui sont en fait inexorablement liés l'un à l'autre, puisqu'une relation de dérivation existe entre la phase instantanée du signal et sa fréquence angulaire instantanée.

Nous sommes maintenant en mesure d'étudier l'instabilité de fréquence à court terme et la pureté spectrale qui résultent toutes deux de la présence des sources de bruit aléatoire. L'instabilité de fréquence à long terme (par jour, par mois ou par an) qui mesure la dérive lente et systématique de la fréquence moyenne est en dehors du cadre de cette étude.

## INSTABILITE DE FREQUENCE A COURT TERME

La fréquence émise par tout générateur réel fluctue aléatoirement dans le temps autour de sa valeur moyenne  $f_0$ . Le bruit de fréquence peut être représenté mathématiquement par une fonction aléatoire stationnaire, gaussienne, de moyenne nulle : stationnaire dans la mesure où le mécanisme physique des sources de bruit est indépendant du choix de l'origine du temps ; gaussienne dans la mesure où la fluctuation macroscopique observable est la somme d'un très grand nombre de perturbations élémentaires indépendantes (tendance vers la loi de Gauss).



Les propriétés statistiques d'une telle fonction aléatoire sont entièrement contenues dans sa densité spectrale qui constitue le concept de base de la caractérisation dans le domaine fréquence.

D'une façon générale, la densité spectrale d'une fonction aléatoire représente la distribution de sa puissance moyenne dans le domaine des fréquences (de Fourier) ; son intégration sur un intervalle de fréquence donné donne la puissance de bruit présente dans cet intervalle ; son intégration sur tout le domaine des fréquences donne la puissance moyenne totale.

---

## DOMAINE FREQUENCE

---

L'instabilité de fréquence à court terme d'un oscillateur est caractérisée dans le domaine fréquence par la densité spectrale  $S_{\phi}(f)$  de la fonction aléatoire qui représente son bruit de fréquence ou par la densité spectrale  $S_{\phi}(f)$  de la fonction aléatoire qui représente son bruit de phase ; elles sont liées entre elles par une relation simple du fait de la relation de dérivation entre phase et fréquence. Ces densités spectrales du bruit de fréquence et du bruit de phase ne prennent des valeurs significatives que pour des fréquences de Fourier très petites par rapport à la fréquence moyenne  $f_0$  du signal, ceci traduit le fait que les fluctuations correspondantes sont lentes par rapport à la variation temporelle du signal  $\cos 2 \pi f_0 t$ . Ces densités spectrales, localisées dans la zone des basses fréquences, ne représentent nullement la répartition de la puissance du signal émis autour de la fréquence porteuse  $f_0$  (cf. paragraphe sur la pureté spectrale).

La connaissance de l'une ou l'autre de ces densités spectrales fournit toutefois le maximum d'informations sur la nature et sur le niveau du bruit de fréquence ou de phase.

Pratiquement, on présente généralement la densité spectrale du bruit de phase  $S_{\phi}(f)$  en coordonnées logarithmiques (dB sous 1 (radian)<sup>2</sup>/Hz) ce qui permet d'identifier aisément les différentes pentes, donc la nature des différents bruits présents dans la source étudiée. Pour un très bon oscillateur à quartz, on peut avoir par exemple, en  $\text{rd}^2/\text{Hz} = S_{\phi}(f) = 5 \cdot 10^{-15} + 4 \cdot 10^{-13} f^{-1} + 2 \cdot 10^{-12} f^{-3}$  pour  $f$  compris entre  $10^{-2}$  Hz et  $10^{+3}$  Hz. La densité spectrale du bruit de fréquence s'en déduit par une simple multiplication par  $f^2$  et s'exprime en (Hertz)<sup>2</sup>/Hertz, soit en Hertz.

---

## DOMAINE TEMPS

---

La fluctuation aléatoire de fréquence se manifeste également à l'expérimentateur de la façon suivante : une série de mesures de fréquence, chacune de durée  $\tau$  comprise entre par exemple une milliseconde et cent secondes, fournit des résultats successifs distribués aléatoirement autour de la valeur moyenne  $f_0$ . Cette distribution des résultats de comptages effectués sur des durées relativement courtes, constitue l'instabilité de fréquence à court terme, sa largeur est caractérisée statistiquement par son écart-type qui est une fonction de la durée  $\tau$  de chacune des mesures (la variance est le carré de l'écart-type). L'instabilité de fréquence relative pendant une durée  $\tau$  est alors mesurée dans le domaine temps par le rapport écart-type/fréquence moyenne  $f_0$ . Une augmentation de  $\tau$  entraîne une amélioration de la stabilité : le bruit de fréquence est d'autant mieux moyenné qu'il est intégré sur une durée plus grande,

sauf dans le cas du bruit de scintillation de fréquence ( $S_{\phi}(f) \approx f^{-3}$ ) pour lequel la variance est constante. Une source de difficultés est que la variance théorique (variance "vraie") ne peut être qu'estimée à l'aide d'un nombre fini de mesures. A partir de N résultats expérimentaux, plusieurs processus d'estimation peuvent être utilisés, qui ne fournissent pas rigoureusement la même valeur numérique de l'instabilité.

Une comparaison significative entre différents résultats de mesure nécessite l'utilisation d'un processus d'estimation commun : c'est la variance d'Allan  $\sigma_y^2(\tau)$  qui est actuellement recommandée.

La courbe donnant l'instabilité de fréquence dans le domaine temps est généralement présentée en coordonnées logarithmiques avec une spécification de la bande passante  $f_h$  du banc de mesure. En effet, pour certains bruits, la variance d'Allan est une fonction de cette bande passante (elle lui est proportionnelle pour le bruit blanc de phase).

Par exemple :  $\sigma_y(1 \text{ ms}) \approx 10^{-9}$  avec  $f_h \approx 1 \text{ kHz}$  pour un oscillateur à quartz, et  $\sigma_y(100 \text{ s}) \approx 10^{-14}$  avec  $f_h \approx 6 \text{ Hz}$  pour le maser à hydrogène.

---

## RELATIONS ENTRE DOMAINE FREQUENCE ET DOMAINE TEMPS

---

La variance d'Allan peut être calculée à partir de la densité spectrale du bruit de phase à l'aide d'une intégrale dont l'interprétation physique est la suivante : l'instabilité pendant une durée  $\tau$  résulte principalement des composantes de la densité spectrale

$S_{\phi}(f)$  comprises entre  $f = \frac{1}{\pi\tau}$  et  $f_h$ .

A chaque type de spectre correspond une loi de la variance en fonction de :

$$(\tau^{-1}, \tau^{-1/2}, \tau^0)$$

Le passage inverse, du domaine temps vers le domaine fréquence, n'est généralement pas possible rigoureusement.

---

## PURETE SPECTRALE

---

Le bruit dans les générateurs se manifeste à l'expérimentateur par une fluctuation aléatoire de la fréquence émise. Il se manifeste également par une dégradation de la pureté spectrale du signal. La pureté spectrale du signal est une mesure de sa qualité dans le domaine des fréquences de Fourier ; un signal sinusoidal pur de durée infinie, de fréquence  $f_0$ , possède une pureté spectrale idéale : sa puissance totale est entièrement localisée dans le domaine fréquence à la fréquence porteuse  $f_0$  ("fonction de Dirac").

Si le signal possède un bruit aléatoire de fréquence, une fraction de sa puissance totale est alors distribuée de façon continue dans des bandes latérales de bruit symétriques autour de la porteuse.

Le paramètre caractéristique de la pureté spectrale est la densité spectrale du signal, souvent dénommée spectre de radio-fréquence (RF) : elle est centrée sur la fréquence porteuse  $f_0$  et représente la distribution de la puissance totale du signal dans le domaine fréquence.

La pureté spectrale est souvent présentée en exprimant, en dB sous la porteuse, la puissance de bruit mesurée dans une bande passante  $\Delta f = 1$  Hz, en fonction de l'écart de fréquence par rapport à la porteuse (on parle alors de dB/Hz à x Hz de la porteuse).

Par exemple, pour un bon oscillateur à quartz, on peut avoir environ - 120 dB/Hz à 10 Hz de la porteuse, et mieux que - 140 dB/Hz à 1 kHz. Un bon synthétiseur à synthèse indirecte a un spectre RF meilleur que - 100 dB/Hz à 100 Hz de la porteuse.

Enfin, par rapport aux paramètres caractéristiques de l'instabilité de fréquence, le spectre RF mesuré contient plus d'informations sur la qualité du signal complet car toutes les perturbations du signal y contribuent directement : bruit de phase, mais aussi bruit d'amplitude, distorsion, modulations parasites, "spurious", etc. Le spectre RF donne une bonne image de la qualité d'un signal.

---

## RELATIONS ENTRE INSTABILITE DE FREQUENCE ET PURETE SPECTRALE

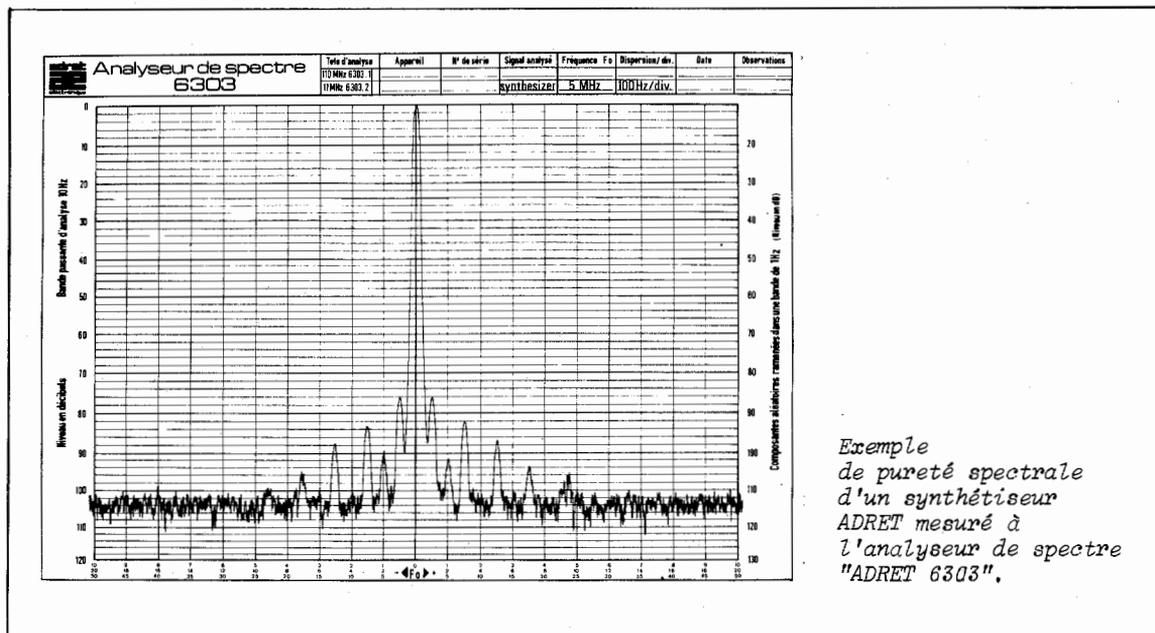
---

L'instabilité de fréquence à court terme et la dégradation de la pureté spectrale ayant pour origine physique commune la présence des sources de bruit, des relations existent nécessairement entre les paramètres caractéristiques correspondants.

Sur le plan théorique, des relations mathématiques générales ont été établies, qui permettent de calculer le spectre RF à partir de la variance vraie ou de la densité spectrale du bruit de phase. Ces relations exactes, importantes pour le théoricien du fait de leur rigueur mathématique, s'avèrent peu utiles pour l'expérimentateur qui préférera des relations approximatives, mais simples à utiliser. Une relation approchée bien connue est l'approximation du "faible indice de modulation" variable lorsque le bruit de phase est très faible ; le spectre RF est alors proportionnel à la densité spectrale du bruit de phase, translatée autour de la fréquence porteuse  $f_0$ .

De plus, des relations approchées ont été récemment établies par l'auteur, qui permettent de calculer la variance d'Allan à partir d'un enregistrement du spectre RF

exprimé en dB/Hz, et ce pour les différents types de bruit rencontrés dans les générateurs de fréquence. Elles montrent nettement la relation entre les ordres de grandeur numériques : 20 dB/Hz pour le spectre RF correspondent à une puissance de 10 pour la variance d'Allan : 6 dB/Hz correspondent à un facteur 2. Ces relations approchées peuvent être représentées sur des abaques qui évitent alors tout calcul.



L'abaque correspondant au bruit blanc de phase permet de prédire qu'un oscillateur à 10 MHz, dont le spectre RF est plat et égal à - 120 dB/Hz, aura une stabilité égale à environ  $1,2 \cdot 10^{-9}$  pour  $\tau = 1$  ms.

## METHODES DE MESURE

A chaque paramètre caractéristique correspond un banc de mesure particulier dont on rappelle le principe général.

L'instabilité dans le domaine fréquence est obtenue par une démodulation du bruit de phase, suivie d'une analyse spectrale basse-fréquence (entre 1 Hz et 100 kHz par exemple) : on obtient ainsi une mesure de la densité spectrale du bruit de phase. L'appareil de mesure proprement dit est donc un analyseur de spectre BF.

L'instabilité dans le domaine temps est mesurée par un traitement statistique adéquat sur les résultats d'une série de comptages de fréquence (ou de période), chacun de durée  $\tau$ . L'appareil de mesure est donc un fréquencemètre numérique.

Le spectre RF enfin est mesuré par analyse spectrale directe du signal émis par le générateur : l'analyseur de spectre radio-fréquence doit alors posséder une très grande dynamique (120 - 130 dB) et une très haute résolution pour pouvoir donner une image détaillée de la pureté spectrale des sources de haute qualité. Seul un analyseur de spectre synthétisé semble pouvoir donner de telles performances. Pour être complet sur les mesures de l'instabilité de fréquence, il faut préciser que des études théoriques approfondies sur les relations entre domaine fréquence et domaine temps ont permis de montrer que la méthode de mesure classiquement utilisée pour l'un des domaines, pouvait également fournir des résultats dans l'autre, et réciproquement.

Ainsi, la variance de Hadamard introduite par R. Baugh permet une estimation de la densité spectrale du bruit de fréquence par un traitement statistique adéquat des résultats d'une série de comptages effectués à l'aide d'un fréquencemètre numérique.

Inversement, le concept de "variance passe-haut" introduit récemment par l'auteur montre que la variance d'Allan est mesurable par une analyse spéciale (filtrage passe-haut) du bruit de phase démodulé : la variance d'Allan est alors obtenue, sans aucun traitement statistique, par simple lecture sur un voltmètre efficace. Un banc de mesure unique donne ainsi l'instabilité dans les deux domaines, selon la nature du filtrage subi par le bruit de phase démodulé.

---

## CONCLUSION

---

Le traitement rigoureux de la caractérisation du bruit dans les générateurs de fréquence ne peut être effectué qu'à l'aide de la théorie des fonctions aléatoires. Dans cet article, nous nous sommes limités à une approche plus qualitative dont le but était de dégager les principaux concepts et leur interprétation physique. Le lecteur, désireux d'approfondir ses connaissances devra ensuite se reporter à la bibliographie citée ci-contre.

# LE BRUIT dans les synthétiseurs de fréquence

*Roger CHARBONNIER*

Directeur Technique  
de la Société Adret-Electronique

et *Jacques RUTMAN*

Docteur ès Sciences  
responsable de la Recherche fondamentale  
de la Société Adret-Electronique

A partir d'un oscillateur de référence très stable, un synthétiseur élabore des millions de fréquences dont chacune possède la stabilité à long terme et l'exactitude de la référence, qui est généralement un oscillateur à quartz, mais qui peut être aussi un étalon atomique externe. La résolution en fréquence qui atteint aisément le centième, voire le millième de hertz, ne comporte, en fait, aucune limitation théorique. De plus, le synthétiseur est le seul générateur qui soit naturellement programmable dans ses différentes fonctions. Enfin, l'incorporation d'un oscillateur de recherche lui ouvre de nombreuses possibilités (modulations AM, FM passant la composante continue, vobulation de filtres larges et étroits, etc.). Ces qualités rendent le synthétiseur indispensable dans un très grand nombre d'applications qui vont du laboratoire de physique aux équipements de télécommunications en passant par les bancs automatiques de contrôle de l'industrie.

---

## PURETE SPECTRALE DES SYNTHETISEURS

---

Dans le passé, la pureté spectrale des synthétiseurs a souvent été jugée insuffisante. Depuis lors, l'évolution technologique et le développement de circuits nouveaux a permis une amélioration fondamentale de la qualité du signal.

Le signal idéal est en effet dégradé par des perturbations :

- aléatoires (bruit des composants), dont la caractérisation est traitée en détail dans l'article ci-joint ;

- cohérentes, qui se divisent en raies harmoniques, et en raies non harmoniques, ("spurious"). Ces dernières ont pour origine, soit la transmission parasite d'une fréquence fixe existant dans l'appareil, soit un produit d'intermodulation d'ordre élevé à

la sortie d'un mélangeur, soit enfin une modulation d'amplitude ou de phase du signal synthétisé par une fréquence fixe ou par la fréquence du secteur. Le niveau des raies cohérentes est spécifié en décibel sous le niveau de la porteuse.

Seule l'analyse spectrale à grande dynamique du signal synthétisé permet de spécifier complètement la pureté spectrale.

---

## PERFORMANCES D'UN SYNTHETISEUR MODERNE

---

On peut préciser numériquement les possibilités actuelles de la technique de synthèse indirecte utilisée exclusivement chez Adret, en présentant les spécifications d'un synthétiseur moderne : le modèle 110 MHz de la série 6000.

Le spectre de radiofréquences mesuré est meilleur que - 100 dB/Hz à 100 Hz de la porteuse, - 110 dB/Hz à 1 kHz, - 130 dB/Hz à 1 MHz et - 140 dB/Hz à 10 MHz de la porteuse.

Le spectre de bruit décroît donc très vite au voisinage de la porteuse pour atteindre ensuite une valeur asymptotique caractéristique des possibilités actuelles de la synthèse indirecte utilisant un mélangeur-amplificateur de sortie. Le bruit de phase pouvant être également caractérisé dans le domaine temps, une technique de mesure originale a été développée chez Adret pour la détermination de la variance d'Allan. Des mesures effectuées avec une bande passante égale à 100 kHz donnent par exemple sur une milliseconde :

$\sigma_y(1 \text{ ms}) = 10^{-8}$  à 10 MHz, et  $\sigma_y(1 \text{ ms}) = 2.10^{-9}$  à 110 MHz pour l'appareil de la série 6000.

Ces valeurs sont environ dix fois meilleures si l'on considère une bande passante de mesure de 1 kHz, valeur généralement utilisée pour la caractérisation des oscillateurs à quartz.

La qualité de cette stabilité à court terme est la contrepartie, dans le domaine temps, de la qualité de la pureté spectrale au voisinage de la porteuse.

Les raies harmoniques sont spécifiées à - 40 dB pour un niveau de sortie de + 7 dBm, alors que les raies non harmoniques sont typiquement à - 80 dB, quelle que soit leur origine physique.

Enfin, cette pureté spectrale s'accompagne d'une stabilité à long terme de  $5.10^{-9}$  par jour après un mois de fonctionnement ( $2.10^{-10}$  par jour en option) et d'une résolution en fréquence de un hertz pouvant être portée à 0,01 Hz.

---

## CONCLUSION

---

Les progrès réalisés depuis plusieurs années font du générateur-synthétiseur un appareil de plus en plus utilisé. Actuellement, seules quelques applications particulières qui nécessitent des niveaux de bruit de l'ordre de - 130 à - 140 dB/Hz à 10 kHz de la porteuse, échappent encore à son domaine d'application. Toutefois, des synthétiseurs ne couvrant pas les basses fréquences peuvent utiliser une sortie directe sur oscillateur ; le spectre de bruit asymptotique devrait être alors celui d'un générateur LC à sortie directe (- 150 dB/Hz ou mieux). Plusieurs constructeurs ont développé un type de générateur intermédiaire entre le générateur classique et le synthétiseur : le générateur synchronisé ; il est parfois dénommé "synthétisé", à tort à notre avis, dans la mesure où la fréquence de sortie n'est en aucun cas synthétisée chiffre par chiffre, ce qui est la caractéristique fondamentale de tout synthétiseur, qu'il soit à synthèse directe (sans boucles de phase) ou indirecte (avec boucles de phase). Une comparaison systématique de leur pureté spectrale avec celle des synthétiseurs nous paraît difficile, car certains constructeurs de générateurs synchronisés ne caractérisent pas suffisamment les performances spectrales de leurs produits. Le générateur-synthétiseur de fréquence, par l'ensemble de ses qualités spécifiques actuelles et par le fait que les techniques de synthèse s'améliorent de jour en jour, apparaît comme étant le générateur de demain, tant au laboratoire que pour les équipements.

---

## BIBLIOGRAPHIE

"IEEE NASA Symposium on Short Term Frequency Stability" G. S. F. C., Greenbelt, Maryland, November 1964 (26 conférences).

"Proceedings of the IEEE", février 1966, numéro spécial sur la Stabilité de Fréquence (17 articles).

J. Rutman : "Instabilité de Fréquence des Oscillateurs": L'Onde Electrique, décembre 1972.

J. Rutman : "Characterization of Frequency Stability : a transfer function approach and its application to measurements via filtering of phase noise". IEEE Tr. on Instrumentation and Measurement (mars 1974).

"Nouvelles possibilités en Analyse Spectrale : l'analyseur de spectre synthétisé". Note Technique Adret Electronique.

---



**adret électronique**

**12-14, AVENUE VLADIMIR KOMAROV - 78190 TRAPPES**

TEL. : **051 29 72** — B.P. 33 - 78190 TRAPPES

TELEX ADREL TRAPS 60821

Société anonyme au capital de 4.200.000 f

R.C. Versailles 67 B 507 INSEE 285 78 621 0 005

Compte Chèque Postal : Paris 21 797 04